Die Ausgleichung von Sterbetafeln nach Gompertz-Makehamschen Polynomen

---

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Johann Wolfgang Goethe-Universität zu Frankfurt a. M.

vorgelegt von

Karl Munkelt
aus Weißenfels

Spezialbetrieb für Dissertationsdruck von Robert Noske in Borna-Leipzig
1939

Referenten:

Prof. Dr. G. Aumann

Prof. Dr. A. Patzig

Tag der mündlichen Prüfung: 13. 9. 1939

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

1. Kapitel. Das Gesetz vom gleichmäßigen Altern 2
§ 1. Das Verbindungsrentenproblem und die Gompertz-Makehamsche Formel 2
§ 2. Der Umkehrsatz des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern . . 5

2. Kapitel. Über die Darstellung von Sterbetafeln durch die Gompertz-Makehamsche Formel 9
§ 1. Schranken für den Gültigkeitsbereich der Gompertz-Makehamschen Formel 9
§ 2. Der Gültigkeitsbereich der Gompertz-Makehamschen Formel 14

3. Kapitel. Ein Ausgleichungsverfahren 19
§ 1. Ausgleichung nach Gompertz-Makehamschen Polynomen . . 19
§ 2. Bestimmung der Koeffizienten 23
§ 3. Bestimmung der Gewichte 26

4. Kapitel. Über die Berechnung von Sterbeintensitäten 29
§ 1. Numerische Differentiation und Integration 29
§ 2. Interpolationsmethoden 31
§ 3. Approximationsmethoden 33
§ 4. Anwendung der Formeln bei der Ausgleichung von Sterbetafeln 37

5. Kapitel. Ein numerisches Beispiel 40
§ 1. Berechnung der Sterbeintensitäten 40
§ 2. Ausgleichung nach Gompertz-Makehamschen Polynomen . . 41
§ 3. Die Ausgleichung des Tafelanfangs 44
§ 4. Die Ausgleichung des Tafelendes 46
§ 5. Berechnung der ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten 49
§ 6. Untersuchung der Gültigkeit des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern 50

Literaturverzeichnis.

1. Berger, Mathematik der Lebensversicherung. Wien 1939.
2. Blaschke, Vorlesungen über mathematische Statistik. Leipzig und Berlin 1906.
3. Boehm, Versicherungsmathematik. Berlin und Leipzig 1926.
4. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig und Berlin 1910.
5. Gompertz, On the nature of the function expressive of the law of human mortality. Lond. Transact. 1825.
6. Jecklin, Die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit als Hilfsgröße zur Bestimmung des technischen Durchschnittsalters von Personengruppen in der Lebensversicherung. Blätter für Versicherungsmathematik. 4. Band Heft 6. 1938.
7. Landré, Mathematisch technische Kapitel zur Lebensversicherung. Jena 1921.
8. Makeham, Of the Law of human Mortality. Journal of the Inst. of Actuaries. 1860.
9. Riebesell, Eine zukünftige deutsche Sterbetafel. Neumanns Zeitschrift für Versicherungswesen. 61. Jahrg. Nr. 4. 1938.
10. Runge, König, Numerisches Rechnen. Berlin 1924.
11. Willers, Numerische Integration. Berlin u. Leipzig 1923.

Einleitung.

Das Wesen einer sogenannten Ausgleichung von Beobachtungswerten besteht darin, daß die aus der Beobachtung erhaltene Zahlenreihe überarbeitet und durch eine andere Zahlenreihe ersetzt wird. Bei der Ausgleichung von Beobachtungswerten aus Sterblichkeitsuntersuchungen hat man vor allem zu unterscheiden, ob es sich um eine wissenschaftliche Untersuchung oder um die Aufstellung einer Tafel handelt, die als technische Grundlage für Prämienberechnungen geeignet sein soll. Bei einer wissenschaftlichen Untersuchung der Sterblichkeit wird man sich am besten an die beobachteten Werte selbst halten, die schließlich nur allein den wahrheitsgemäßen Bericht über das Geschehen der Vergangenheit darstellen. Anders liegen die Verhältnisse aber bei Tafeln, die im Versicherungsbetrieb Verwendung finden sollen. Eine Sterbetafel soll hier für möglichst lange Zeit die Grundlage der Prämien- und Reserveberechnungen sein. Wollte man hierfür unausgeglichene Werte benutzen, so würden sich bei den Prämien unerwünschte und unbequeme Sprünge zeigen. Die Aufgabe der Ausgleichung von Versicherten-Sterbetafeln kann daher dahin formuliert werden, daß

1. die abgeänderte Reihe sich möglichst gut den beobachteten Werten anschmiegt, und daß

2. die abgeänderte Reihe einen solchen Verlauf aufweist, wie er bei den Anwendungen gebraucht wird.

Die erste Forderung muß erfüllt sein, da es selbstverständlich unzulässig ist, an dem Beobachtungsmaterial größere Änderungen vorzunehmen.

Der zweiten Forderung pflegt man meistens dadurch zu genügen, daß man verlangt, daß die Kurve der ausgeglichenen Werte möglichst glatt verläuft. Man wird sich dann damit begnügen, Unregelmäßigkeiten der unausgeglichenen Werte zu beseitigen, was z. B. durch mechanische Verfahren erreicht werden kann.

Die zweite Forderung kann indessen noch anders aufgefaßt werden. Man kann nämlich verlangen, daß die ausgeglichene Tafel einen besonders zweckmäßigen Verlauf aufweist, z. B. einem ana-

lytischen Gesetz folgt, das besondere Eigenschaften von versicherungstechnischer Bedeutung besitzt.

In dieser Arbeit soll nun eine besonders wichtige Eigenschaft, die manchen Sterbetafeln zukommt, untersucht werden, nämlich die Eigenschaft, daß eine ausgeglichene Sterbetafel eine Lösung des Verbindungsrentenproblems zuläßt. In den beiden ersten Kapiteln der Arbeit sollen diejenigen Funktionen, mit denen ein spezieller Fall des Verbindungsrentenproblems gelöst werden kann, festgestellt und auf ihre Verwendbarkeit für die Darstellung von Sterbetafeln untersucht werden. Im Anschluß an diese Untersuchungen soll dann ein Ausgleichungsverfahren angegeben werden, das in gewisser Beziehung zum Verbindungsrentenproblem steht.

1. Kapitel.

Das Gesetz vom gleichmäßigen Altern.

§ 1.

Das Verbindungsrentenproblem und die Gompertz-Makehamsche Formel.

Man spricht von einer Versicherung auf verbundene Leben, wenn für eine Gruppe von mehreren Personen eine Versicherung derart abgeschlossen wird, daß die Auszahlung der Versicherungssumme davon abhängt, daß an einem bestimmten Zeitpunkt eine bestimmte Anzahl von Personen der Gruppe noch am Leben ist. Die Hauptarbeit bei der Berechnung von Versicherungswerten verbundener Leben besteht darin, zu jeder Gruppe von n Personen der Alter $x_1, x_2, \ldots, x_n$ den Barwert der vorschüssig zahlbaren, auf t Jahre abgekürzten Verbindungsrente

$$a_{x_1, x_2, \ldots, x_n, t|} = \sum_{s=0}^{t} v^s \cdot \prod_{i=1}^{n} {}_s p_{x_i}$$

zu berechnen. Man sieht, daß bereits bei Gruppen von nur zwei Personen sehr ausgedehnte Rechnungen notwendig sind, um die Werte aller möglichen Verbindungsrenten zu erhalten. Für drei und mehr Personen wird die Rechenarbeit bald praktisch undurchführbar. Es ist daher häufig untersucht worden, wie die Berechnung von Versicherungswerten verbundener Leben vereinfacht werden kann. Man hat sich dazu die Aufgabe gestellt, Verfahren anzugeben, mit deren Hilfe beliebige Verbindungsrenten auf besonders einfach zu be-

rechnende Verbindungsrenten zurückgeführt werden können. Am einfachsten lassen sich aber Verbindungsrenten gleichaltriger Personen berechnen. Man wird dann auf das sogenannte Verbindungsrentenproblem geführt, eine Gruppe von n Personen der Alter x_1, x_2, ..., x_n derart durch eine Gruppe von m gleichaltrigen Personen des „Zwischenalters" w zu ersetzen, daß die Verbindungsrenten beider Gruppen den gleichen Wert erhalten, daß also

$$a_{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \overline{t}|} = a_{\underbrace{w, w, \ldots\ldots, w}_{m\text{-mal}}, \overline{t}|}$$

wird. Das Zwischenalter w ist dabei im weiteren Sinne zu verstehen, da es durchaus nicht immer zwischen dem kleinsten und dem größten Alter der x_i zu liegen braucht.

Betrachtet man Sterbetafeln, die nach analytischen Funktionen ausgeglichen worden sind, so läßt nicht jede derartige Funktion eine Lösung des Verbindungsrentenproblems zu. Andererseits gibt es analytische Funktionen, mit denen das Verbindungsrentenproblem gelöst werden kann, z. B. die Gompertz-Makehamsche Formel oder die Formel von Gompertz. Dann läßt noch die Annahme, daß die Sterbeintensitäten linear sind, eine Lösung zu. Es ist bekannt, daß hiermit alle Möglichkeiten, das Verbindungsrentenproblem zu lösen, erschöpft sind. Einen Spezialfall dieses Satzes, den Umkehrsatz des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern, wollen wir indessen auf eine andere Art als üblich beweisen.

Von den verschiedenen Versuchen, den Verlauf einer Sterbetafel durch eine analytische Funktion wiederzugeben, ist auch heute noch die Formel von Gompertz und Makeham am wichtigsten. Diese Formel, nach der

$$\mu(x) = A + B \cdot c^x$$

gesetzt wird, macht eine Aussage über die Größenordnung des Anwachsens der Sterbeintensitäten $\mu(x)$ und hat zweifellos im Kern einen biologischen Sinn. Allerdings ist der Geltungsbereich der Gompertz-Makehamschen Formel ziemlich klein; er erstreckt sich nur etwa über die Alter 25 bis 75, doch sind gerade diese Alter für den Versicherungsbetrieb am wichtigsten.

Die Gompertz-Makehamsche Formel besitzt besonders günstige Eigenschaften für die Berechnung von Versicherungswerten verbundener Leben. Wenn nämlich eine Sterbetafel nach ihr ausgeglichen ist, läßt sich das Verbindungsrentenproblem auf folgende Weise lösen:

Da der Zusammenhang zwischen Lebenswahrscheinlichkeiten und Sterbeintensitäten durch die Beziehung

$$ {}_sp_{x_i} = e^{-\int_0^s \mu(x_i+z)\,dz} $$

gegeben ist, wird

$$ \prod_{i=1}^{n} {}_sp_{x_i} = e^{-\int_0^s \left[\sum_{i=1}^{n} \mu(x_i+z)\right] dz} . $$

Aus der Gompertz-Makehamschen Formel folgt

$$ \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i+z) = n \cdot A + B \cdot c^z \cdot \sum_{i=1}^{n} c^{x_i} . $$

Setzt man daher

$$ \sum_{i=1}^{n} c^{x_i} = n \cdot c^w , \tag{1} $$

so wird

$$ \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i+z) = n\,(A + B \cdot c^{w+z}) = n \cdot \mu(w+z) . $$

Dann ist aber

$$ a_{x_1, x_2, \ldots, x_n, \overline{t}|} = \sum_{s=0}^{t} v^s \cdot e^{-\int_0^s n \cdot \mu(w+z)\,dz} = \underbrace{a_{w, w, \ldots, w}}_{n\text{-mal}}, \overline{t}| . $$

Das Verbindungsrentenproblem kann also für die Gompertz-Makehamsche Formel gelöst werden. Das einer Personengruppe zugeordnete Zwischenalter w wird aus der Gleichung (1) berechnet. Dann gilt allgemein für jedes z

$$ \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i+z) = n \cdot \mu(w+z) . $$

Diese Fundamentaleigenschaft der Gompertz-Makehamschen Formel bezeichnet man als das Gesetz vom gleichmäßigen Altern. Dieses Gesetz besagt, daß das Zwischenalter w um z wächst, wenn die Einzelalter x_i um z zunehmen.

Die Gompertz-Makehamsche Funktion $\mu(x)$ ist nicht die einzige Funktion, die dem Gesetz vom gleichmäßigen Altern genügt. Auch die lineare Funktion $\mu(x) = a + b \cdot x$ erfüllt dieses Gesetz, wie man aus

$$\sum_{i=1}^{n}[a+b(x_i+z)] = n\cdot a+b\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i+n\cdot b\cdot z = n[a+b(w+z)]$$

erkennt, wobei w das arithmetische Mittel der x_i bedeutet.

§ 2.

Der Umkehrsatz des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern.

Die Frage, ob es außer der Gompertz-Makehamschen und der linearen Funktion noch andere Funktionen gibt, die dem Gesetz vom gleichmäßigen Altern genügen, wird durch den folgenden Umkehrsatz beantwortet:

Eine Funktion $\mu(x)$ erfülle folgende Voraussetzungen:

1. $\mu(x)$ ist in einem Intervall $<\alpha, \beta>$ zweimal stetig differenzierbar. In $<\alpha, \beta>$ ist $\mu'(x)\neq 0$.

2. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und w Punkte aus dem offenen Intervall (α, β), für die

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(x_i) = n\cdot\mu(w) \tag{2}$$

ist, so gilt die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(x_i+z) = n\cdot\mu(w+z) \tag{3}$$

für alle z, für die $\alpha \leq x_i+z$, $w+z\leq\beta$ ist.

Dann gilt:

$\mu(x)$ ist entweder linear, oder es ist

$$\mu(x) = A+B\cdot c^x.$$

Da wir $\mu'(x)\neq 0$ vorausgesetzt haben, ist $\mu(x)$ eine monotone Funktion. Die Forderung der Monotonie von $\mu(x)$ ist notwendig, damit der Zwischenwert w eindeutig bestimmt werden kann. Es seien nämlich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Punkte aus (α, β), für die z. B. $\mu(x_1)\leq\mu(x_2)\leq\cdots\cdots\leq\mu(x_n)$ sein soll. Dann folgt

$$\mu(x_1)\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu(x_i)\leq\mu(x_n).$$

Da $\mu(x)$ als stetige Funktion vorausgesetzt worden ist, ist

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu(x_i)$$

ein Funktionswert von $\mu(x)$ aus (α, β). Wegen der Monotonie von $\mu(x)$ kann dann w aus der Gleichung (2) eindeutig bestimmt werden. Da w stets zwischen x_1 und x_n liegt, ist w in diesem Falle ein Zwischenwert der x_i im engeren Sinne.

Um den Umkehrsatz des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern zu beweisen, genügt es, wenn gezeigt wird, daß die Gompertz-Makehamsche und die lineare Funktion die einzigen monotonen und zweimal stetig differenzierbaren Funktionen sind, die der Funktionalgleichung (3) für $n = 2$ genügen. Denn es gilt der Satz:

Jede Lösung der Funktionalgleichung (3) für beliebiges n ist auch Lösung von (3) für $n = 2$, und umgekehrt ist jede Lösung von (3) für $n = 2$ auch Lösung von (3) für beliebiges n. Dabei brauchen wir nur vorauszusetzen, daß $\mu(x)$ stetig und monoton ist.

Wir beweisen zunächst den ersten Teil dieses Satzes, indem wir zeigen:

Genügt eine stetige und monotone Funktion $\mu(x)$ der Funktionalgleichung (3) für ein festes $n = n_0$ (>2), so genügt $\mu(x)$ der Funktionalgleichung (3) für $n = n_0 - 1$.

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}$ beliebige Punkte aus (α, β). Wir wählen irgendeinen weiteren Punkt x_{n_0} aus (α, β) und setzen

$$\sum_{i=1}^{n_0-1} \mu(x_i) + \mu(x_{n_0}) = n_0 \cdot \mu(w_1),$$

wobei w_1 wegen der Monotonie und Stetigkeit von $\mu(x)$ in (α, β) liegt. Die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ sind dann n_0 Punkte aus (α, β). Daher gilt nach Voraussetzung

$$\sum_{i=1}^{n_0-1} \mu(x_i + z) + \mu(x_{n_0} + z) = n_0 \cdot \mu(w_1 + z).$$

Wegen der Monotonie und Stetigkeit von $\mu(x)$ kann ein Punkt w_2 aus (α, β) so bestimmt werden, daß

$$\sum_{i=1}^{n_0-1} \mu(x_i) = (n_0 - 1) \cdot \mu(w_2)$$

ist. Addiert man auf beiden Seiten $\mu(x_{n_0})$, so folgt

$$(n_0 - 1) \cdot \mu(w_2) + \mu(x_{n_0}) = n_0 \cdot \mu(w_1).$$

Auf der linken Seite stehen n_0 Funktionswerte aus (α, β). Nach Voraussetzung gilt dann

$$(n_0-1)\,\mu(w_2+z)+\mu(x_{n_0}+z)=n_0\,\mu(w_1+z)=\sum_{i=1}^{n_0-1}\mu(x_i+z)+\mu(x_{n_0}+z),$$

und man erhält

$$\sum_{i-1}^{n_0\quad 1}\mu(x_i+z)=(n_0-1)\cdot\mu(w_2+z).$$

Damit ist aber die Behauptung bewiesen.

Die (n_0-2)-malige Anwendung dieses Schlusses liefert dann die Aussage des ersten Teiles unseres Satzes.

Um nun auch den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß eine monotone und stetige Funktion $\mu(x)$, die Lösung von (3) für $n=n_0$ ist, auch Lösung von (3) für $n=2n_0$ ist.

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_{2n_0}$ beliebige Punkte aus (α, β). Nach Voraussetzung gibt es dann zwei Punkte w_1 und w_2, so daß

$$\sum_{i=1}^{n_0}\mu(x_i+z)=n_0\cdot\mu(w_1+z)$$

und

$$\sum_{i=n_0+1}^{2n_0}\mu(x_i+z)=n_0\cdot\mu(w_2+z)$$

ist. Addiert man beide Gleichungen, so folgt

$$\sum_{i=1}^{2n_0}\mu(x_i+z)=n_0\left[\mu(w_1+z)+\mu(w_2+z)\right].$$

Da wir bereits gezeigt haben, daß $\mu(x)$ Lösung von (3) für $n=2$ ist, wenn $\mu(x)$ Lösung von (3) für $n=n_0$ (≥ 2) ist, gibt es einen Punkt w aus (α, β), so daß

$$\mu(w_1+z)+\mu(w_2+z)=2\,\mu(w+z)$$

ist. Dann ist aber

$$\sum_{i=1}^{2n_0}\mu(x_i+z)=2n_0\cdot\mu(w+z),$$

was behauptet worden war.

Jetzt kann der zweite Teil unseres Satzes bewiesen werden. Da $\mu(x)$ Lösung von (3) für $n=n_0-1$ und für $n=2n_0$ ist, wenn $\mu(x)$ Lösung von (3) für $n=n_0$ ist, so folgt aus der Annahme, daß

$\mu(x)$ Lösung von (3) für $n=2$ ist, daß $\mu(x)$ für jedes n Lösung von (3) ist. Es sei nämlich n_1 das kleinste n, für das $\mu(x)$ nicht Lösung von (3) ist. Es ist dann sicherlich $n_1 > 2$. Ist nun n_1 gerade, so ist $\mu(x)$ für $\frac{n_1}{2}$ Lösung von (3) und daher auch für $2 \cdot \frac{n_1}{2} = n_1$. Es muß also n_1 ungerade sein. Dann ist aber $n_1 + 1$ gerade und $\frac{n_1+1}{2} < n_1$. Folglich ist wieder $\mu(x)$ für $2 \cdot \frac{n_1+1}{2} = n_1 + 1$ Lösung von (3) und daher auch für $(n_1+1)-1 = n_1$. Wir sind daher zu einem Widerspruch gekommen. $\mu(x)$ muß für jedes n Lösung von (3) sein.

Wir wollen jetzt den Beweis für den Satz geben, daß eine zweimal stetig differenzierbare, monotone Funktion $\mu(x)$, für die $\mu'(x) \neq 0$ ist, und die für beliebiges z der Funktionalgleichung

$$\mu(x+z) + \mu(y+z) = 2\mu(w+z) \tag{4}$$

genügt, wobei w durch

$$\mu(x) + \mu(y) = 2\mu(w)$$

bestimmt ist, notwendig linear oder die Gompertz-Makehamsche Funktion $\mu(x)$ ist.

Wir bilden für die Punkte $x+z$, $y+z$, $w+z$ den zugehörigen zweiten Differenzenquotienten der Funktion $\mu(x)$

$$\mu(x+z, y+z, w+z) = \frac{\dfrac{\mu(x+z)-\mu(w+z)}{x-w} - \dfrac{\mu(y+z)-\mu(w+z)}{y-w}}{x-y}$$

Da (4) auch in der Form

$$\mu(x+z) - \mu(w+z) = \mu(w+z) - \mu(y+z)$$

geschrieben werden kann, wird

$$\mu(x+z, y+z, w+z) = \mu(y+z, w+z) \cdot \frac{2w-x-y}{(x-w)\cdot(x-y)},$$

wobei $\mu(y+z, w+z)$ den ersten Differenzenquotienten von $\mu(x)$ für die Punkte $y+z$, $w+z$ bedeutet. Hält man y fest und läßt x eine Zahlenfolge mit dem Grenzwert y durchlaufen, so konvergiert auch w nach y. Weil $\mu'(y+z) \neq 0$ ist, ist

$$\lim_{x \to y} \frac{\mu(x+z, y+z, w+z)}{\mu(y+z, w+z)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu''(y+z)}{\mu'(y+z)}$$

vorhanden, d. h. es existiert

$$\lim_{x \to y} \frac{2w - x - y}{(x - w) \cdot (x - y)} = \frac{1}{2} \cdot \varphi(y).$$

Daher ist

$$\mu''(y + z) = \mu'(y + z) \cdot \varphi(y).$$

Für $z = 0$ ist dann

$$\mu''(y) = \mu'(y) \cdot \varphi(y).$$

Ersetzt man hierin y durch $y + z$, so wird

$$\mu''(y + z) = \mu'(y + z) \cdot \varphi(y + z).$$

Dann muß also

$$\varphi(y + z) = \varphi(y)$$

sein. Da z willkürlich gewählt werden kann, muß

$$\varphi(y) = \log c$$

konstant sein. Aus

$$\mu''(y) = \log c \cdot \mu'(y)$$

erhält man für $c = 1$ die lineare Funktion, für $c \neq 1$ die Gompertz-Makehamsche Funktion. Damit ist der Umkehrsatz des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern bewiesen.

2. Kapitel.

Über die Darstellung von Sterbetafeln durch die Gompertz-Makehamsche Formel.

§ 1.

Schranken für den Gültigkeitsbereich der Gompertz-Makehamschen Formel.

In der Einleitung haben wir zwei Forderungen aufgestellt, die bei einer Tafelausgleichung erfüllt sein müssen. Nachdem wir für unsere spezielle Forderung, daß die ausgeglichene Tafel dem Gesetz vom gleichmäßigen Altern genügt, nur zwei Funktionen als Lösungen gefunden haben, muß jetzt noch festgestellt werden, ob mit diesen Funktionen auch die erste Forderung erfüllt werden kann, ob also diese Funktionen geeignet sind, eine empirische Absterbeordnung hinreichend genau wiederzugeben.

Zunächst stellen wir fest, daß ein linearer Verlauf der Sterbeintensitäten völlig im Widerspruch zur Beobachtung steht. Eine

lineare Funktion kann daher nicht zur Darstellung einer Sterbetafel verwendet werden.

Für die weitere Untersuchung bleibt daher nur noch die Formel von Gompertz und Makeham übrig. Wenn die Konstanten A, B und c dieser Formel für eine unausgeglichene Sterbetafel aus den Werten der mittleren Altersklassen (etwa zwischen den Altern 25 bis 75) bestimmt werden, wird

$$A > 0\,,\quad B > 0\,,\quad c > 1\,.$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß dann die Gompertz-Makehamsche Formel drei Eigenschaften besitzt, die im Widerspruch zur Beobachtung stehen.

Aus der Gompertz-Makehamschen Formel folgt

$$\mu'(x) = B \cdot \log c \cdot c^x > 0\,.$$

Daher ist $\mu(x)$ eine monoton steigende Funktion. Da bei empirischen Tafeln Sterbeintensitäten nicht von vornherein vorhanden und meistens auch nicht berechnet worden sind, soll eine entsprechende Eigenschaft der Sterbenswahrscheinlichkeiten nachgewiesen werden. Da

$$q(x) = 1 - e^{-\int_0^1 \mu(x+t)\,dt} \tag{5}$$

ist, wird

$$q'(x) = e^{-\int_0^1 \mu(x+t)\,dt} \cdot \int_0^1 \mu'(x+t)\,dt > 0\,,$$

d. h. es gilt allgemein: Mit $\mu(x)$ ist auch $q(x)$ monoton steigend.

Da die Sterbenswahrscheinlichkeiten einer Sterbetafel etwa beim Alter 15 ein Minimum aufweisen, vermag die Gompertz-Makehamsche Formel eine Absterbeordnung höchstens vom Alter 15 an wiederzugeben.

Durch folgende Untersuchungen kann die untere Grenze des Gültigkeitsbereiches der Gompertz-Makehamschen Formel noch genauer bestimmt werden. Es ist

$$\mu''(x) = B \cdot \log^2 c \cdot c^x > 0\,,$$

d. h. die Gompertz-Makehamsche Funktion $\mu(x)$ ist konvex nach unten. Dieses Ergebnis überträgt sich nicht ohne weiteres auf die Sterbenswahrscheinlichkeiten, da mit $\mu(x)$ nicht unbedingt auch $q(x)$ nach unten konvex zu sein braucht. Wir werden jedoch zei-

gen, daß die Gompertz-Makehamsche Formel diese Eigenschaft besitzt. Wendet man auf das im Exponenten von (5) stehende Integral den Mittelwertsatz der Integralrechnung an, so kann

$$\int_0^1 \mu(x+t)\,dt = \mu(x+\vartheta)$$

gesetzt werden. Dabei bedeutet ϑ eine Zahl zwischen 0 und 1, die von der Stelle x abhängt. Wenn die $\mu(x)$ durch die Gompertz-Makehamsche Formel dargestellt werden, wird

$$\int_0^1 \mu(x+t)\,dt = A + B \cdot \frac{c-1}{\log c} \cdot c^x$$

und

$$\mu(x+\vartheta) = A + B \cdot c^{\vartheta} \cdot c^x .$$

Daher ist

$$c^{\vartheta} = \frac{c-1}{\log c} ,$$

d. h. ϑ ist bei der Gompertz-Makehamschen Formel konstant. Aus

$$q(x) = 1 - e^{-\mu(x+\vartheta)}$$

folgt dann

$$q''(x) = e^{-\mu(x+\vartheta)} \cdot \left[\mu''(x+\vartheta) - (\mu'(x+\vartheta))^2\right] .$$

Dann ist

$$\operatorname{sgn} q''(x) = \operatorname{sgn}\left[1 - B \cdot c^{x+\vartheta}\right] .$$

Daher wird

$$\operatorname{sgn} q''(x) = +1 ,$$

wenn

$$x < -\frac{\log B}{\log c} - \vartheta$$

ist.

Wir wollen dieses Grenzalter für die Bevölkerungstafeln des Deutschen Reiches berechnen. Die Werte der Konstanten B und c dieser Tafeln (Männer-Tafeln) sind einem Aufsatz von Prof. Riebesell (Neumanns Zeitschrift Nr. 4, 1938) entnommen worden. Das Alter x, bis zu dem die Gompertz-Makehamsche Funktion $q(x)$ konvex nach unten ist, enthält folgende Tabelle:

Tabelle 1.

Tafel	B	c	$-\frac{\log B}{\log c}$	x etwa
1871/80	0,00029	1,07697	109,85	109
1881/90	0,000394	1,07708	105,57	105
1891/00	0,000344	1,07869	105,28	105
1901/10	0,000278	1,08175	104,29	104
1924/26	0,000049	1,10434	[illegible]	99
1932/34	0,000048	1,10530	99,33	99

Das Grenzalter x ist bei allen Tafeln annähernd derselbe Wert. Da es außerhalb des Bereiches einer Absterbeordnung liegt, ist die Gompertz-Makehamsche Funktion $q(x)$ für den gesamten Bereich einer Sterbetafel konvex nach unten.

Wenn man jedoch den Verlauf der Sterbenswahrscheinlichkeiten einer empirischen Tafel untersucht, findet man, daß $q''(x)$ etwa vom Alter 15 bis zum Alter 25 negativ wird, daß also $q(x)$ in diesem Abschnitt konkav nach unten ist. Dieses Verhalten der $q(x)$ soll bei drei Bevölkerungstafeln gezeigt werden.

Wir wollen die q_x der Tafel in der Umgebung einer Stelle x_0, etwa für $x_0 - \nu \leq x \leq x_0 + \nu$ durch das Polynom 4 Grades

$$q(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i (x - x_0)^i$$

darstellen. Die Koeffizienten a_i werden aus den $2\nu + 1$ Werten q_x nach der Methode der kleinsten Quadratsumme bestimmt. Das Vorzeichen von

$$q''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2$$

entscheidet dann über die Konvexität von $q(x)$. Wir setzen $x_0 = 20$ und $\nu = 8$. Die Werte der Konstanten a_2, a_3, a_4 sind in folgender Tabelle enthalten. In zwei weiteren Spalten der Tabelle stehen die Wurzeln x_1 und x_2 der Gleichung $q''(x) = 0$.

Tabelle 2.

Tafel	$10^3 \cdot a_2$	$10^3 \cdot a_3$	$10^3 \cdot a_4$	x_1	x_2
1891/00	−0,06436	−0,0009533	0,0006908	16,40	24,29
1901/10	−0,05267	−0,0003363	0,0005328	16,10	24,22
1932/34	−0,02832	−0,0001922	0,0002841	16,09	24,25

Da $2a_2 = g''(20)$ negativ ausfällt, und $x_1 < 20 < x_2$ ist, ist $g(x)$ bei allen drei Tafeln zwischen x_1 und x_2 konkav nach unten. Daher kann die Gompertz-Makehamsche Formel für die Alter 15 bis 25 ebenfalls nicht verwendet werden.

Nach den bisherigen Untersuchungen ist die Gompertz-Makehamsche Formel höchstens zwischen den Altern 25 bis 100 brauchbar. Tatsächlich vermag sie aber eine Sterbetafel nur etwa zwischen den Altern 25 bis 75 wiederzugeben. Da die Sterbenswahrscheinlichkeiten der Alter 75 bis 100 monoton steigen und auch konvex nach unten sind, muß für das Versagen der Gompertz-Makehamschen Formel in den höheren Altersstufen ein anderer Grund vorliegen. Die Gompertz-Makehamsche Funktion $\mu(x)$ ist nun nicht nur konvex, sondern sie ist sogar logarithmisch konvex. Das erkennt man aus

$$\frac{d^2 \log \mu(x)}{dx^2} = \frac{\mu(x) \cdot \mu''(x) - (\mu'(x))^2}{(\mu(x))^2} = \frac{A \cdot B \cdot \log^2 c \cdot c^x}{(\mu(x))^2} > 0 .$$

Aus

$$-\log p(x) = \mu(x + \vartheta)$$

folgt, daß mit $\mu(x)$ auch die Funktion $-\log p(x)$ logarithmisch konvex ist, d. h. die Funktion

$$f(x) = \log[-\log p(x)]$$

ist konvex nach unten.

Untersucht man jedoch die Konvexität von $f(x)$ bei empirischen Tafeln, so findet man, daß $f(x)$ etwa vom Alter 75 an konkav nach unten ist. Dieses Verhalten soll wieder an Hand von Bevölkerungstafeln nachgewiesen werden. Bezeichnen wir mit Log Briggsche Logarithmen und setzen $M = \mathrm{Log}\, e$, so wird

$$g(x) = \mathrm{Log}[-\mathrm{Log}\, p(x)] = M \cdot f(x) + \mathrm{Log}\, M .$$

Wenn $f(x)$ konvex nach unten ist, ist auch $g(x)$ konvex nach unten und umgekehrt. Wir können uns daher auf die Untersuchung von $g(x)$ beschränken. Wir setzen für $x_0 - r \leq x \leq x_0 + r$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{3} a_i (x - x_0)^i$$

und bestimmen die a_i aus den $2r + 1$ Werten g_x nach der Methode der kleinsten Quadratsumme. Das Vorzeichen von $g''(x)$ entscheidet dann über die Konvexität von $g(x)$. Wir setzen $x_0 = 72$ und $r = 8$. Die Werte der a_i und die Wurzel x_1 der Gleichung $g''(x) = 0$ enthält die folgende Tabelle.

Tabelle 3.

Tafel	a_2	a_3	x_1
1891/00	0,0001209	— 0,00001264	75,19
1901/10	0,0001293	— 0,00002664	73,62
1932/34	0,0000551	— 0,00001786	73,03

Da $2a_2 = g''(72)$ positiv wird und $x_1 > 72$ ist, ist $g(x)$ etwa vom Alter 73 an konkav nach unten. Die Werte $-\log p_x$ der empirischen Tafel werden daher kleiner sein als die entsprechenden Werte der Gompertz-Makehamschen Formel. Diese steigt in den höheren Altersklassen rascher an, als es den tatsächlichen Verhältnissen entspricht. — Zusammenfassend stellen wir noch einmal fest, daß die Gompertz-Makehamsche Formel höchstens zwischen den Altern 25 bis 75 eine empirische Sterbetafel wiederzugeben vermag.

§ 2.

Der Gültigkeitsbereich der Gompertz-Makehamschen Formel.

Nachdem wir für den Gültigkeitsbereich der Gompertz-Makehamschen Formel eine untere und eine obere Schranke gefunden haben, soll jetzt untersucht werden, ob eine Sterbetafel wenigstens zwischen diesen Schranken durch die Gompertz-Makehamsche Formel dargestellt werden kann. Hierüber läßt sich zwar keine allgemein gültige Aussage machen, da eine Funktion, die sich der einen Sterbetafel anzupassen vermag, bei einer anderen Tafel vollkommen versagen kann, wir werden jedoch eine Bedingung herleiten, die von den Tafelwerten jedenfalls erfüllt sein muß, wenn die Tafel durch die Gompertz-Makehamsche Funktion dargestellt werden kann. Diese Bedingung wird es gestatten, die Schranken des Gültigkeitsbereiches der Gompertz-Makehamschen Formel genauer festzulegen, und sie reicht auch im allgemeinen aus, um zu entscheiden, ob eine Sterbetafel durch die Gompertz-Makehamsche Funktion dargestellt werden kann.

Wir wollen die Sterbeintensitäten μ_x einer Sterbetafel in der Umgebung einer Stelle n durch das Polynom m-ten Grades

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{m} a_{n,i} \cdot y^i$$

darstellen, wobei $y = x - n$ gesetzt worden ist. Der zu μ_n gehörige Wert des Polynoms ist dann durch

$$P_n(n) = a_{n,0}$$

gegeben. Die Koeffizienten $a_{n,i}$ bestimmen wir nach der Methode der kleinsten Quadratsumme aus den $2r+1$ Sterbeintensitäten $\mu_{n\pm l}$ $(l = 0,1, \ldots, r)$. Aus der Minimumbedingung

$$\sum_{y=-r}^{+r} (P_n(x) - \mu_x)^2 = \text{Min}$$

erhält man dann die Normalgleichungen

$$\sum_{i=0}^{m} a_{n,i} [y^{j+i}] = [y^j \cdot \mu_x] \qquad (j = 0, 1, \ldots, m),$$

wobei die Gaußsche Summenschreibweise

$$\sum_{y=-r}^{+r} y^\lambda = [y^\lambda], \quad \sum_{y=-r}^{+r} y^j \mu_x = [y^j \mu_x]$$

benutzt worden ist. Es ist daher $[y^{2l+1}] = 0$. Wenn wir die Bezeichnungsweise der Matrizenrechnung einführen, können wir die Normalgleichungen in folgender Form schreiben

$$\mathfrak{y} \cdot \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mu_x] \\ [y\,\mu_x] \\ \vdots \\ [y^m\,\mu_x] \end{pmatrix}$$

wobei $\mathfrak{y}$ die Matrix $([y^{j+i}])$ bedeutet. Die Determinante $D = |\mathfrak{y}|$ ist stets von Null verschieden. Bezeichnen wir in der Determinante D das algebraische Komplement, das zu dem in der j-ten Zeile und i-ten Spalte $(i, j = 0,1, \ldots, m)$ stehenden Element $[y^{j+i}]$ gehört, mit Y_{ji}, so ist die Matrix

$$\mathfrak{y}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} Y_{00} & Y_{10} \cdots\cdots Y_{m0} \\ Y_{01} & Y_{11} \cdots\cdots Y_{m1} \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ Y_{0m} & Y_{1m} \cdots\cdots Y_{mm} \end{pmatrix}$$

reziprok zur Matrix $\mathfrak{y}$, und man erhält die Koeffizienten $a_{n,i}$ aus der Matrizengleichung

$$(6) \qquad \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,m} \end{pmatrix} = \mathfrak{y}^{-1} \begin{pmatrix} [\mu_x] \\ [y\,\mu_x] \\ \vdots \\ [y^m\,\mu^x] \end{pmatrix}.$$

Wenn die Sterbeintensitäten μ_x durch die Gompertz-Makehamsche Formel gegeben sind, wird

$$[y^j\,\mu_x] = A\,[y^j] + B \cdot c^n \cdot [y^j\,c^y]\,.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Matrizengleichung (6) ein, so erhält man

$$\begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,m} \end{pmatrix} = A \cdot \mathfrak{y}^{-1} \begin{pmatrix} [y^0] \\ [y^1] \\ \vdots \\ [y^m] \end{pmatrix} + B \cdot c^n \cdot \mathfrak{y}^{-1} \begin{pmatrix} [c^y] \\ [y\,c^y] \\ \vdots \\ [y^m\,c^y] \end{pmatrix}$$

$$= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{B \cdot c^n}{D} \cdot \begin{pmatrix} Y_{00}\,[c^y] + Y_{10}\,[y\,c^y] + \cdots + Y_{m0}\,[y^m\,c^y] \\ Y_{01}\,[c^y] + Y_{11}\,[y\,c^y] + \cdots + Y_{m1}\,[y^m\,c^y] \\ \vdots \\ Y_{0m}[c^y] + Y_{1m}[y\,c^y] + \cdots + Y_{mm}[y^m\,c^y] \end{pmatrix}.$$

Hieraus erhält man für den Koeffizienten $a_{n,0}$

$$a_{n,0} = A + B' \cdot c^n\,,$$

wobei

$$B' = B \cdot \frac{1}{D}\,(Y_{00}\,[c^y] + Y_{10}\,[y\,c^y] + \cdots + Y_{m0}\,[y^m\,c^y])$$

gesetzt worden ist. Den ganzzahligen Funktionswerten μ_n entsprechen daher Polynomwerte $a_{n,0}$, die sämtlich wieder durch eine Gompertz-Makehamsche Funktion dargestellt werden können. Dabei bleiben die Konstanten A und c erhalten, während B mit einem Faktor multipliziert wird, der von c, r und m abhängt. Wir wollen uns über die Größe dieses Faktors, den wir mit ϱ bezeichnen, einen Überblick verschaffen. Für $c = 1$ ist offenbar $\varrho = 1$. Da c für Sterbetafeln nur wenig größer als 1 ist, wird auch ϱ nur wenig von 1 verschieden sein. Das zeigt auch die folgende Tabelle, die die zu verschiedenen Werten von c und r gehörenden Werte von ϱ enthält, wobei $m = 2$ oder $m = 3$ gesetzt worden ist (man erhält in beiden Fällen die gleiche Formel).

Tabelle 4.

r \ c	1,08	1,10	1,12
2	0,999997	0,999993	0,999986
3	0,999985	0,999965	0,999928
4	0,999955	0,999893	0,999786

Da ϱ praktisch gleich 1 ist, und die Polynomannäherung mit steigendem Grade m immer besser wird, können wir sagen, daß die Polynomdarstellung die Gompertz-Makehamsche Funktion an den ganzzahligen Stellen ungeändert läßt. Da Sterbetafeln gewöhnlich nur für ganzzahlige Argumente tabuliert werden, und da man zwei Sterbetafeln, die in den Werten aller ganzzahligen Stellen übereinstimmen, als identisch ansieht, können wir sagen, daß die Polynomdarstellung die Gompertz-Makehamsche Funktion überall ungeändert läßt.

Die Koeffizienten $a_{n,1}$, $a_{n,2}$ .... $a_{n,m}$ besitzen nun eine Eigenschaft, die uns auf die erwähnte Bedingung führen wird. Wenn die μ_x durch die Gompertz-Makehamsche Funktion gegeben sind, wird

$$a_{n,i} = \frac{B \cdot c^n}{D} (Y_{0i}[c^y] + Y_{1i}[y\, c^y] + \cdots + Y_{mi}[y^m c^y]) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Daher ist

$$\frac{a_{n,i}}{a_{n,1}} = \frac{Y_{0i}[c^y] + Y_{1i}[y\, c^y] + \cdots + Y_{mi}[y^m c^y]}{Y_{01}[c^y] + Y_{11}[y\, c^y] + \cdots + Y_{m1}[y^m c^y]}.$$

Die rechte Seite hängt nur noch von c, r und m ab; sie hängt nicht mehr von der Stelle n ab. Es ist dann also

$$\frac{a_{n,i}}{a_{n,1}} = k_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k_1 = 1)$$

für die ganze Tafel konstant.

Die Konstante k_2 steht in naher Beziehung zur Konstante c der Gompertz-Makehamschen Formel. Aus

$$P_n'(n) = a_{n,1} \quad \text{und} \quad P_n''(n) = 2 \cdot a_{n,2}$$

folgt nämlich

$$\frac{a_{n,2}}{a_{n,1}} = \frac{1}{2} \frac{P_n''(n)}{P_n'(n)} = k_2.$$

Für die $\mu(x)$ der Gompertz-Makehamschen Formel gilt nun

$$\frac{\mu''(x)}{\mu'(x)} = \log c .$$

Da wir die Sterbeintensitäten $\mu(x)$ in der Umgebung der Stelle n durch das Polynom $P_n(x)$ ersetzen können, wird angenähert $2k_2 \sim \log c$ sein.

Jetzt können wir die Bedingung ableiten, die notwendig erfüllt sein muß, wenn eine Sterbetafel durch die Gompertz-Makehamsche Funktion dargestellt werden kann. Wir stellen die μ_x der Tafel durch die Polynome $P_n(x)$ dar. Dann müssen notwendig die Quotienten

$$\frac{a_{n,i}}{a_{n,1}}$$

von der Stelle n unabhängige Konstante sein. Diese Bedingung läßt sich leicht für eine vorgegebene Sterbetafel nachprüfen. Wenn dann diese Quotienten nicht annähernd konstant sind, kann die Tafel sicherlich nicht durch die Gompertz-Makehamsche Funktion wiedergegeben werden.

Es besteht noch die Schwierigkeit, daß bei empirischen Sterbetafeln Sterbeintensitäten meist nicht berechnet werden. Im 4. Kap. werden wir die hierfür notwendigen Formeln ableiten. Man kann sich aber in unserem Falle noch anders helfen. Da für die Gompertz-Makehamsche Formel die Funktion

$$-\log p(x) = \mu(x+\vartheta) = A + B \cdot c^{\vartheta} \cdot c^{x}$$

die gleiche Form wie die Funktion $\mu(x)$ hat, gelten alle Überlegungen auch für die Funktion $-\log p(x)$.

Wir wollen unsere Bedingung bei einer empirischen Sterbetafel nachprüfen. Wir wählen hierfür die „Deutsche Vereinstafel 1926". Im 5. Kap. § 1 haben wir zu den unausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten der Tafel Sterbeintensitäten berechnet, die wir jetzt der Rechnung zugrunde legen wollen. Wir setzen $m = 2$ und $r = 3$. Dann wird

$$\frac{a_{n,2}}{a_{n,1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\mu_{n-3} - 3\mu_{n-1} - 4\mu_n - 3\mu_{n+1} + 5\mu_{n+3}}{-3\mu_{n-3} - 2\mu_{n-2} - \mu_{n-1} + \mu_{n+1} + 2\mu_{n+2} + 3\mu_{n+3}} .$$

Die Tabelle 5 enthält die Ergebnisse der Rechnung.

Tabelle 5.

x	$\frac{a_{n,2}}{a_{n,1}}$	x	$\frac{a_{n,2}}{a_{n,1}}$	x	$\frac{a_{n,2}}{a_{n,1}}$	x	$\frac{a_{n,2}}{a_{n,1}}$
29	0,126	42	0,029	55	0,049	68	0,048
30	0,146	43	0,024	56	0,053	69	0,050
31	0,115	44	0,036	57	0,059	70	0,038
32	0,093	45	0,056	58	0,057	71	0,040
33	0,066	46	0,063	59	0,045	72	0,028
34	0,057	47	0,055	60	0,029	73	0,031
35	0,059	48	0,047	61	0,017	74	0,037
36	0,053	49	0,034	62	0,018	75	0,056
37	0,032	50	0,029	63	0,025	76	0,063
38	0,021	51	0,027	64	0,038	77	0,044
39	0,020	52	0,028	65	0,046	78	0,016
40	0,029	53	0,034	66	0,049	79	— 0,002
41	0,035	54	0,044	67	0,050	80	0,005

Wenn man von den Altern 29 bis 33 und den Altern 78 bis 80 absieht, deren Werte offenbar ganz aus dem Rahmen der übrigen fallen, stellt man fest, daß die Bedingung annähernd erfüllt ist. Denn die Quotienten $a_{n,2}:a_{n,1}$ haben im Bereich der Alter 34 bis 77 überall die gleiche Größenordnung und schwanken um einen mittleren Wert, der etwa bei 0,04 liegt. Der Gültigkeitsbereich der Gompertz-Makehamschen Formel für die Vereinssterbetafel ist daher höchstens der Bereich zwischen den Altern 34 bis 77, und es ist zu vermuten, daß die Tafel in diesem Bereich mit guter Annäherung durch die Gompertz-Makehamsche Formel dargestellt werden kann.

3. Kapitel.

Ein Ausgleichungsverfahren.

§ 1.

Ausgleichung nach Gompertz-Makehamschen Polynomen.

Da die Gompertz-Makehamsche Formel sich nicht für den ganzen Bereich einer Absterbeordnung verwenden läßt, hat man an der Formel verschiedene Änderungen vorgenommen, durch die erreicht werden soll, daß die abgeänderte Formel einen größeren Gültigkeitsbereich besitzt. So ergänzt z. B. Lazarus die Gompertz-

Makehamsche Funktion $\mu(x)$ durch ein weiteres Exponentialglied und erhält

$$\mu(x) = A + B \cdot c^x + D \cdot e^x .$$

D und e sollen dabei so bestimmt werden, daß der Einfluß des Zusatzgliedes etwa vom Alter 25 an verschwindet. Im Gültigkeitsbereich des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern, der mit dem Gültigkeitsbereich der Gompertz-Makehamschen Formel zusammenfällt, stimmt daher die Lazarussche Formel mit der Gompertz-Makehamschen überein, während für die jüngeren Altersklassen ein besserer Anschluß an die beobachteten Werte erreicht werden kann. Eine ähnliche Ergänzung müßte dann noch vorgenommen werden, um die Gompertz-Makehamsche Formel auch in den höheren Altersklassen mit der Erfahrung in Einklang zu bringen. Durch diese notwendigen Abänderungen verliert die Formel jedoch ihre Einfachheit, und die Konstantenbestimmung nach einem einheitlichen Prinzip wird sehr umständlich. Man begnügt sich daher auch meistens damit, die Konstanten der Zusatzglieder durch Versuche zu bestimmen, was aber auch nicht immer einfach ist.

Es ist daher verständlich, daß in der Praxis der Tafelausgleichung mechanische Verfahren bevorzugt werden. Für sie spricht die Einfachheit in der Anwendung, da bei ihnen der ausgeglichene Wert Linearkombination der Urwerte ist. Während die Gompertz-Makehamsche Formel selbst in ihrem Anwendungsbereich nicht immer eine Sterbetafel, z. B. Frauensterbetafeln, darzustellen vermag, ermöglichen mechanische Verfahren, wie der Erfolg gezeigt hat, eine starke Anschmiegung an das Beobachtungsmaterial. Im Zusammenhang unserer Untersuchungen über das Verbindungsrentenproblem müssen wir jedoch einen Nachteil der üblichen mechanischen Verfahren feststellen. Eine mechanisch ausgeglichene Tafel wird im allgemeinen nicht dem Gesetz des gleichmäßigen Alterns genügen. Sie kann diesem Gesetz mit besserer Annäherung folgen, als es die unausgeglichene Tafel getan hat, sie braucht es aber nicht. Hierüber läßt sich keine allgemein gültige Aussage machen.

Wir haben daher folgenden Sachverhalt: Die Gompertz-Makehamsche Funktion $\mu(x)$ genügt dem Gesetz vom gleichmäßigen Altern, sie schmiegt sich aber nicht immer hinreichend genau den beobachteten Werten an. Es läßt sich erst nach der Ausgleichung beurteilen, ob sie geeignet ist, die betreffende Tafel wiederzugeben. Eine mechanisch ausgeglichene Tafel hingegen zeigt einen guten Anschluß an die beobachteten Werte, sie genügt aber im allge-

meinen nicht dem Gesetz vom gleichmäßigen Altern. Es wäre daher wünschenswert, eine Methode aufzustellen, die die Vorzüge der Gompertz-Makehamschen Formel mit denen der mechanischen Verfahren in sich vereint. Verlangt man dabei die strenge Gültigkeit des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern, so müßte die Tafel nach der Gompertz-Makehamschen Formel ausgeglichen werden. Rein praktische Gründe zeigen jedoch, daß das Bestehen des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern nur näherungsweise gefordert zu werden braucht. In einer Sterbetafel sind sowohl die biometrischen Funktionen als auch die Versicherungswerte nur für ganzzahlige Argumente tabuliert. Das zu einer Personengruppe gehörige Zwischenalter w bestimmt man daher durch Interpolation. Wenn man, wie es in der Praxis geschieht, w auf volle Altersjahre abrundet, begeht man einen Fehler, der die strenge Gültigkeit des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern als nicht notwendig erscheinen läßt. Es würde bereits genügen, wenn eine Tafel keine allzu großen Abweichungen von diesem Gesetz aufweist. Das wollen wir durch ein Ausgleichungsverfahren erreichen, das folgende Eigenschaften besitzen soll:

1. Die ausgeglichenen Tafelwerte sollen sich den beobachteten Werten möglichst gut anpassen.

2. Die ausgeglichene Tafel soll das Gesetz vom gleichmäßigen Altern in dessen Gültigkeitsbereich angenähert erfüllen.

Wir wollen die unausgeglichenen Sterbeintensitäten einer Tafel in der Umgebung einer Stelle n durch das Polynom

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{m} a_{n,i} \cdot y^i$$

darstellen, wobei n ganzzahlig ist, und $y = x - n$ gesetzt worden ist. Dann soll der zu μ_n gehörige ausgeglichene Wert durch

$$P_n(n) = a_{n,0}$$

gegeben sein.

Der ersten Forderung unseres Ausgleichungsverfahrens genügen wir dadurch, daß wir die Koeffizienten $a_{n,i}$ nach der Methode der kleinsten Quadratsumme aus den $2r+1$ Sterbeintensitäten $\mu_{n\pm l}$ $(l = 0,1, \ldots, r)$ bestimmen.

Der zweiten Forderung wollen wir dadurch genügen, daß wir dem Polynom $P_n(x)$ eine charakteristische Eigenschaft der Gompertz-Makehamschen Formel geben. Die Gompertz-Makehamsche Formel kann nun durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mu''(x)}{\mu'(x)} = \log c$$

charakterisiert werden. Diese Eigenschaft wollen wir auf das Polynom $P_n(x)$ übertragen, indem wir verlangen, daß für jedes n

$$\frac{P_n''(n)}{P_n'(n)} = 2k_2 = \text{const.} \tag{7}$$

ist. Dann muß aber

$$a_{n,2} = k_2 \cdot a_{n,1}$$

sein. Aber auch die Konstanten $a_{n,3}, \ldots, a_{n,m}$ wollen wir nicht willkürlich variieren lassen. Im Anschluß an die Bedingungen des 2. Kap. § 2 verlangen wir, daß auch

$$a_{n,i} = k_i \cdot a_{n,1} \qquad (i = 3, \ldots, m)$$

ist. Das Polynom $P_n(x)$ hat dann die Form

$$P_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1} \cdot \sum_{i=1}^{m} k_i y^i \qquad (k_1 = 1),$$

wobei also nur noch die Koeffizienten $a_{n,0}$ und $a_{n,1}$ von der Stelle n abhängen, während die k_i im Gültigkeitsbereich des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern konstant sind. Diese Polynome $P_n(x)$ wollen wir als Gompertz-Makehamsche Polynome bezeichnen.

Die Gompertz-Makehamschen Polynome erfüllen nun die beiden Forderungen unseres Ausgleichungsverfahrens. Wenn nämlich die μ_x bereits auf einer Gompertz-Makehamschen Funktionskurve liegen, ist die zweite Forderung jedenfalls erfüllt. Wenn es andererseits einen Bereich der Sterbetafel gibt, für den eine natürliche Zahl l derart angegeben werden kann, daß in der Umgebung $<n-l,\ n+l>$ jeder Stelle n des Bereiches die Tafelwerte $\mu_{n-l}, \ldots, \mu_{n+l}$ hinreichend genau durch das Gompertz-Makehamsche Polynom $P_n(x)$ wiedergegeben werden können, so kann die Funktion μ_x in der Umgebung der Stelle n durch das Polynom $P_n(x)$ ersetzt werden. Da diese Polynome die Eigenschaft (7) besitzen, wird auch die ausgeglichene Tafel die Bedingung $\mu_x'' = 2k_2 \cdot \mu_x'$ angenähert erfüllen, d. h. die Tafel besitzt annähernd den Gompertz-Makehamschen Funktionsverlauf. Wenn hingegen kein Bereich der Tafel existiert, der durch die Gompertz-Makehamschen Polynome in der angegebenen Art wiedergegeben werden kann, so kann doch die Ausgleichung trotzdem nach ihnen vorgenommen werden, da wegen der Willkür der Konstanten $a_{n,0}$ und $a_{n,1}$ immer

noch ein guter Anschluß an die beobachteten Werte erreicht werden kann, während die Gompertz-Makehamsche Formel dann nicht für die Darstellung der Tafel geeignet ist.

§ 2.

Bestimmung der Koeffizienten.

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, die Koeffizienten der Gompertz-Makehamschen Polynome aus den gegebenen Werten zu bestimmen. Wir wollen etwa die Sterbeintensitäten $\mu_{x_1}, \ldots, \mu_{x_2}$ nach unserem Verfahren ausgleichen. Die Koeffizienten $a_{n,0}$ und $a_{n,1}$ ändern sich mit n; wir können sie daher aus den Bedingungen

$$\sum_{y=-r}^{+r} (P_n(x) - \mu_x)^2 = \text{Min} \qquad (n = x_1, \ldots, x_2) \tag{8}$$

bestimmen. Die Konstanten k_i hingegen sind von der Stelle n unabhängig. Um k_i bestimmen zu können, brauchen wir daher eine Bedingung, die sich über die ganze Tafel erstreckt. Am einfachsten ist es, wenn wir dazu die Bedingungen (8) in eine einzige zusammenfassen:

$$\sum_{n=x_1}^{x_2} \left[\sum_{y=-r}^{+r} (P_n(x) - \mu_x)^2 \right] = \text{Min}.$$

Diese Zusammenfassung ist aber nur dann statthaft, wenn die einzelnen Minimabedingungen einander gleichwertig sind, wenn also die Einzelsummen

$$\sum_{y=-r}^{+r} (P_n(x) - \mu_x)^2$$

annähernd von der gleichen Größenordnung sind. Das ist nun durchaus nicht immer der Fall. Wenn wir daher die Gleichwertigkeit der Minimabedingungen erreichen wollen, müssen wir jeder ein Gewicht G_n zuordnen, mit dem sie in die Minimumbedingung der k_i eingeht. Dann wird

$$\sum_{n=x_1}^{x_2} \left[G_n \sum_{y=-r}^{+r} (P_n(x) - \mu_x)^2 \right] = \text{Min}. \tag{9}$$

Aus den Bedingungen (8) und aus der Bedingung (9) erhält man dann für die $a_{n,i}$ und k_i folgende Normalgleichungen

1. $$a_{n,0}[y^0] + a_{n,1} \cdot \sum_{i=1}^{m} k_i [y^i] = [\mu_x] \qquad (n = x_1, \ldots, x_2)$$

2. $$a_{n,0} \cdot \sum_{i=1}^{m} k_i [y^i] + a_{n,1} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^{m} k_i y^i \right)^2 \right] = \left[\mu_x \sum_{i=1}^{m} k_i y^i \right]$$

3. $$\sum_{n=x_1}^{x_2} G_n \cdot a_{n,1} \left(a_{n,0}[y^j] + a_{n,1} \cdot \sum_{i=1}^{m} k_i [y^{i+j}] - [y^j \mu_x] \right) = 0$$

$(j = 2, \ldots, m)$.

Wir multiplizieren die Gleichungen 1 und 2 mit

$$G_n \cdot a_{n,1} = G_n'$$

und addieren alle so entstehenden Gleichungen:

1′. $$[y^0] \cdot \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' \cdot a_{n,0} + \sum_{i=1}^{m} k_i [y^i] \cdot \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' \cdot a_{n,1} = \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' \cdot [\mu_x]$$

2′. $$\sum_{i=1}^{m} k_i [y^i] \cdot \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' \cdot a_{n,0} + \left[\left(\sum_{i=1}^{m} k_i y^i \right)^2 \right] \cdot \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' \cdot a_{n,1} = \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' \left[\mu_x \sum_{i=1}^{m} k_i y^i \right].$$

Die rechte Seite der Gleichung 2′ kann noch etwas umgeformt werden. Da

$$\sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' \left[\mu_x \sum_{i=1}^{m} k_i y^i \right] = \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} k_i [y^i \mu_x] \right) = \sum_{i=1}^{m} k_i \left(\sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' [y^i \mu_x] \right)$$

ist, erhält man für die Gleichung 2′

2′. $$\sum_{i=1}^{m} k_i [y^i] \cdot \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' \cdot a_{n,0} + \left[\left(\sum_{i=1}^{m} k_i y^i \right)^2 \right] \cdot \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' a_{n,1} = \sum_{i=1}^{m} k_i \left(\sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' [y^i \mu_x] \right).$$

In der Gleichung 3 führen wir die Summation aus:

3′. $$[y^i] \cdot \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' \cdot a_{n,0} + \sum_{i=1}^{m} k_i [y^{i+j}] \cdot \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' \cdot a_{n,1} = \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' [y^j \mu_x]$$

$(j = 2, \ldots, m)$.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' \cdot a_{n,i} = \overline{a_i} \quad \text{und} \quad \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' [y^j \mu_x] = \overline{[y^j \mu_x]},$$

so erhält man folgendes Gleichungssystem

1″. $$[y^0] \cdot \overline{a_0} + \sum_{i=1}^{m} k_i [y^i] \cdot \overline{a_1} = \overline{[\mu_x]}$$

2″. $$\sum_{i=1}^{m} k_i [y^i] \cdot \overline{a_0} + \left[\left(\sum_{i=1}^{m} k_i y^i \right)^2 \right] \cdot \overline{a_1} = \sum_{i=1}^{m} k_i \overline{[y^i \mu_x]}$$

3″. $$[y^j] \cdot \overline{a_0} + \sum_{i=1}^{m} k_i [y^{i+j}] \cdot \overline{a_1} = \overline{[y^j \mu_x]} \qquad (j = 2, \ldots, m).$$

Das sind $m+1$ Gleichungen für die Unbekannten $\overline{a_0}$, $\overline{a_1}$ k_2, …, k_n. Um die Gleichungen bequem auflösen zu können, multiplizieren wir die Gleichung 3″ mit k_j und addieren über j:

3‴. $$\sum_{j=2}^{m} k_j [y^j] \cdot \overline{a_0} + \sum_{j=2}^{m} k_j \left(\sum_{i=1}^{m} k_i [y^{i+j}] \right) \cdot \overline{a_1} = \sum_{j=2}^{m} k_j \overline{[y^j \mu_x]}.$$

Wenn wir diese Gleichung von der Gleichung 2″ abziehen, wird

2‴. $$k_1 [y^1] \cdot \overline{a_0} + \left(\left[\left(\sum_{i=1}^{m} k_i y^i \right)^2 \right] - \sum_{j=2}^{m} \sum_{i=1}^{m} k_j k_i [y^{i+j}] \right) \cdot \overline{a_1} = k_1 \overline{[y \mu_x]}.$$

Nun ist

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{m} k_i y^i \right)^2 \right] = \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} k_i k_j y^{i+j} \right] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} k_i k_j [y^{i+j}].$$

Daher erhält man für die in 2‴ auftretende Differenz den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{m} k_i k_1 [y^{i+1}],$$

und man kann das Gleichungssystem in der Form schreiben

$$[y^j] \overline{a_0} + \sum_{i=1}^{m} k_i [y^{i+j}] \cdot \overline{a_1} = \overline{[y^j \mu_x]} \qquad (j = 0, 1, \ldots, m).$$

Führt man noch die Bezeichnung

$$k_i \cdot \overline{a_1} = \overline{a_i} \qquad (i = 2, 3, \ldots, m)$$

ein, so lautet das Gleichungssystem

$$\sum_{i=0}^{m} \overline{a_i} \cdot [y^{i+j}] = \overline{[y^j \mu_x]} \qquad (j = 0, \ldots, m).$$

Wenn man dieses System nach den $\overline{a_i}$ auflöst, findet man, daß die

$$k_i = \frac{\overline{a_i}}{\overline{a_1}}$$

sich allein durch die $\overline{[y^j \mu_x]}$ ausdrücken lassen. Allerdings enthalten die $\overline{[y^j \mu_x]}$ noch die Koeffizienten $a_{n,1}$. Wir werden aber im § 3 zeigen, daß es zweckmäßig ist, die Gewichte G_n umgekehrt proportional zu $a_{n,1}$ zu setzen, so daß also G_n' nicht mehr von $a_{n,1}$ abhängt. Dann hat man im letzten Gleichungssystem ein System linearer Gleichungen vor sich, aus denen die k_i bestimmt werden können. Wenn die k_i bekannt sind, können die $a_{n,1}$ und $a_{n,0}$ berechnet werden. Man erhält für $a_{n,1}$ den Wert

$$a_{n,1} = \frac{[y^0] \cdot \sum_{i=1}^{m} k_i [y^i \mu_x] - \sum_{i=1}^{m} k_i [y^i][\mu_x]}{[y^0]\left[\left(\sum_{i=1}^{m} k_i y^i\right)^2\right] - \left(\sum_{i=1}^{m} k_i [y^i]\right)^2}.$$

Wenn $a_{n,1}$ berechnet worden ist, erhält man schließlich aus der Gleichung

$$a_{n,0} = \frac{[\mu_x]}{[y^0]} - a_{n,1} \cdot \sum_{i=1}^{m} k_i \frac{[y^i]}{[y^0]}$$

den ausgeglichenen Wert $a_{n,0}$.

§ 3.

Bestimmung der Gewichte.

Die Gewichte der Minimumbedingung (9) sollten so bestimmt werden, daß die Minimabedingungen (8) einander annähernd gleichwertig sind. Setzt man die Gewichte $G_n = 1$ und führt die

Berechnung der Polynomkonstanten für eine empirische Sterbetafel durch, so findet man, daß der Einfluß, den die μ_x auf die k_i haben, mit x wächst. Dieses Verhalten erklärt sich aus folgenden Gründen: Wie wir früher festgestellt haben, ist μ_x im Gültigkeitsbereich des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern konvex nach unten. Dann wächst μ_x' in diesem Bereich monoton. Da $P_n'(n) = a_{n,1}$ ist, wächst $a_{n,1}$ mit n. Bestimmt man daher die k_i aus der Minimumbedingung

$$(10) \qquad \sum_{n=x_1}^{x_2}\left[\sum_{y=-r}^{+r}\left(a_{n,0}+a_{n,1}\cdot\sum_{i=1}^{m}k_i y^i-\mu_x\right)^2\right]=\text{Min}\,,$$

so erkennt man, daß eine Änderung der k_i stärker bei großem als bei kleinem $a_{n,1}$ sich bemerkbar macht. Je größer $a_{n,1}$ ist, desto größer ist das Gewicht, mit dem die Einzelsumme

$$\sum_{y=-r}^{+r}(P_n(x)-\mu_x)^2$$

in die Minimumbedingung eingeht. Es kommt daher jeder Einzelsumme ein Gewicht zu, das proportional zu $a_{n,1}$ gesetzt werden kann. Diese Gewichte haben nur dann keinen Einfluß auf die k_i, wenn die k_i vom Intervall $<x_1, x_2>$ unabhängig sind, wie es bei der Gompertz-Makehamschen Formel der Fall ist, was am Schluß dieses Paragraphen gezeigt werden soll. Im allgemeinen werden die k_i jedoch vom Intervall $<x_1, x_2>$ abhängen. Dann bewirken die Gewichte $a_{n,1}$, daß die höheren Altersklassen die k_i stärker beeinflussen als die jüngeren und mittleren Altersklassen. Da die Genauigkeit, mit der die Sterbeintensitäten im Gültigkeitsbereich des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern gegeben sind, aber mit wachsendem x abnimmt, darf den höheren Altersklassen nicht der größte Einfluß auf die k_i eingeräumt werden. Das können wir vermeiden, wenn wir Gewichte G_n einführen, die umgekehrt proportional zu $a_{n,1}$ sind.

Aber auch die absolute Größe der μ_x kann bewirken, daß die höheren Altersklassen besonders maßgebend für die k_i werden. Wie wir früher gesehen haben, ist μ_x im Gültigkeitsbereich des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern monoton steigend. Bestimmen wir die k_i aus der Bedingung (10), so werden die k_i die zahlenmäßig größten Differenzen zu verkleinern suchen. Die Differenzen $(P_n(x) - \mu_x)^2$ können aber bei großem μ_x größer ausfallen als bei kleinem μ_x. Im allgemeinen werden sie für großes x so groß, daß ihnen gegenüber die Werte der Differenzen für kleines x keine

Rolle spielen. Wenn man daher verlangt, daß die k_i so bestimmt werden, daß sie sich der ganzen Tafel gleich gut anpassen, so ist die Minimumbedingung (10) in dieser Form für die Bestimmung der k_i nicht geeignet. Auch die Einführung der Gewichte $1 : a_{n,1}$ beseitigt diesen Fehler nicht vollständig. Wir müssen daher versuchen, den Einfluß, den die absolute Größe der μ_x auf k_i haben kann, wieder aufzuheben. Das können wir erreichen, wenn wir jeder Einzelsumme ein Gewicht zuordnen, das umgekehrt proportional zu μ_n ist. Um mögliche Unregelmäßigkeiten in diesen Gewichten zu vermeiden, wollen wir statt der μ_n selbst die Zahlen $1:[\mu_x]$ als Gewichte einführen. Insgesamt setzen wir also

$$G_n = \frac{1}{[\mu_x] \cdot a_{n,1}},$$

Dann lauten die beiden Minimabedingungen, aus denen wir die $a_{n,i}$ und die k_i bestimmen wollen

$$\sum_{y=-r}^{+r} (P_n(x) - \mu_x)^2 = \text{Min}$$

und

$$\sum_{n=x_1}^{x_2} \frac{1}{[\mu_x] \cdot a_{n,1}} \cdot \sum_{y=-r}^{+r} (P_n(x) - \mu_x)^2 = \text{Min}.$$

An und für sich könnten wir auch die $a_{n,i}$ aus der zweiten Bedingung bestimmen. Daß wir es nicht tun, kommt daher, daß wir die Gewichte G_n umgekehrt proportional zu $a_{n,1}$ gesetzt haben. Wenn man nämlich $a_{n,1}$ aus dieser Bedingung bestimmt, erhält man für $a_{n,1}$ dieselbe Gleichung, als wenn $a_{n,1}$ aus der Bedingung

$$\frac{1}{a_{n,1}} \cdot \sum_{y=-r}^{+r} (P_n(x) - \mu_x)^2 = \text{Min}$$

bestimmt würde. Diese Bedingung verlangt zweierlei Eigenschaften von $a_{n,1}$. Zunächst soll $a_{n,1}$ so gewählt werden, daß die Summe der Differenzen $(P_n(x) - \mu_x)^2$ möglichst klein wird. Dann soll aber $a_{n,1}$ noch so gewählt werden, daß $1:a_{n,1}$ möglichst klein, also $a_{n,1}$ möglichst groß wird. Für uns ist nur die erste Eigenschaft wesentlich. Weil aber auch die zweite Eigenschaft erfüllt sein muß, kann es sein, daß aus der Minimumbedingung nicht der beste Wert für $a_{n,1}$ erhalten wird. Es wird daher zweckmäßig sein, die $a_{n,i}$ und die k_i aus verschiedenen Bedingungen zu bestimmen, wie wir es von Anfang an getan haben.

Wendet man unser Ausgleichungsverfahren auf die Gompertz-Makehamsche Formel an, so wird unsere Gewichtsbestimmung nur dann zulässig sein, wenn man dieselben Werte für die $a_{n,i}$ und die k_i erhält wie im 2. Kap. § 2. Das ist nun in der Tat der Fall, wie jetzt noch gezeigt werden soll. Löst man das Gleichungssystem der $\overline{a_i}$ nach den $\overline{a_i}$ auf, so wird

$$(11) \qquad \begin{pmatrix} \overline{a_0} \\ \overline{a_1} \\ \vdots \\ \overline{a_m} \end{pmatrix} = \mathfrak{y}^{-1} \begin{pmatrix} \overline{[\mu_x]} \\ \overline{[y\,\mu_x]} \\ \vdots \\ \overline{[y^m\,\mu_x]} \end{pmatrix}.$$

Für die Gompertz-Makehamsche Formel ist nun

$$\overline{[y^j\,\mu_x]} = \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' [y^j\,\mu_x] = A[y^j] \cdot \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' + B \cdot [y^j\,c^y] \cdot \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' \cdot c^n.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Matrizengleichung (11) ein, so wird

$$\begin{pmatrix} \overline{a_0} \\ \overline{a_1} \\ \vdots \\ \overline{a_m} \end{pmatrix} = A \cdot \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + B \cdot \sum_{n=x_1}^{x_2} G_n' \cdot c^n \cdot \mathfrak{y}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} [c^y] \\ [y\,c^y] \\ \vdots \\ [y^m\,c^y] \end{pmatrix}.$$

Man sieht, daß man für die k_i und damit auch für die $a_{n,i}$ die gleichen Werte wie früher erhält. Die Gompertz-Makehamsche Formel besitzt also die Eigenschaft, daß für sie die k_i der Gompertz-Makehamschen Polynome unabhängig von der Gewichtsbestimmung und vom Intervalle $<x_1, x_2>$ sind.

4. Kapitel.

Über die Berechnung von Sterbeintensitäten.

§ 1.

Numerische Differentiation und Integration.

Einer Sterblichkeitsmessung können unmittelbar nur die unausgeglichenen Werte der Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeiten p_x und q_x, sowie die Zahlen l_x der Überlebenden, ent-

nommen werden. Man führt daher eine Tafelausgleichung meistens an den Werten dieser Funktionen durch. Wenn dagegen die Reihe der Sterbeintensitäten μ_x ausgeglichen werden soll, müssen die unausgeglichenen Werte der μ_x erst aus den beobachteten Werten berechnet werden. Im folgenden sollen daher Methoden für die Berechnung der unausgeglichenen Sterbeintensitäten angegeben werden. Dann wird noch gezeigt werden, wie umgekehrt aus den Sterbeintensitäten μ_x die Werte der Funktionen p_x, q_x und l_x berechnet werden können. Wir werden für beide Fälle eine Reihe von Formeln herleiten, die, wie wir zeigen werden, auch zur Ausgleichung von Sterbetafeln verwendet werden können.

Wir bezeichnen im folgenden die gegebenen Werte einer Funktion f mit f_x, die errechneten Werte von f mit $f(x)$.

Der Zusammenhang zwischen den Sterbeintensitäten $\mu(x)$ und den Zahlen $l(x)$ der Überlebenden ist durch die Beziehung

$$\mu(x) = -\frac{l'(x)}{l(x)} = -\frac{d \log l(x)}{d x} \tag{12}$$

gegeben. Geht man umgekehrt von der Funktion $\mu(x)$ aus, so wird

$$\log p(x) = -\int_0^1 \mu(x+t)\, dt\,. \tag{13}$$

Man findet daher die $\mu(x)$ aus den l_x durch numerische Differentiation, während umgekehrt die $p(x)$ aus den μ_x durch numerische Integration erhalten werden. Bei beiden numerischen Verfahren ersetzt man die gegebene Funktion f_x durch eine ganze rationale Funktion. Die Ableitung von f_x an der Stelle x_0, bzw. das Integral über f_x im Intervall x_0, x_0+1 erhält man dann durch Differentiation bzw. Integration des Polynoms. Die Koeffizienten des Polynoms werden aus den gegebenen Funktionswerten bestimmt. Benutzt man dabei für die Differentiation die Funktionswerte der Stellen x_0, $x_0 \pm l$ ($l = 1, 2, \ldots$), für die Integration die Funktionswerte der Stellen $x_0 - l$, $x_0 + l + 1$ ($l = 0,1, \ldots$), so erhält man symmetrische Formeln.

Für die Bestimmung der Koeffizienten stehen nun zwei Methoden zur Verfügung: die Methode der Interpolation und die Methode der Approximation. Bei der ersten Methode bestimmt man die ganze rationale Funktion m-ten Grades, die mit der gegebenen Funktion an $m+1$ Stellen übereinstimmt. Man nimmt dann an, daß durch diese rationale Funktion angenähert der Funktionsverlauf wiedergegeben werden kann. Diese Methode ver-

sagt, wenn die Ordinaten der gegebenen Funktion mit Fehlern behaftet sind, wie es bei empirischen Funktionen die Regel ist. Dann ist vor allem die numerische Differentiation unzulässig, da schon geringe Abweichungen der Ordinaten bedeutende Abweichungen der Ableitung nach sich ziehen können. In diesem Falle ersetzt man die gegebene Funktion durch eine ganze rationale Funktion, deren Koeffizienten aus den gegebenen Funktionswerten durch die Methode der kleinsten Quadratsumme bestimmt werden.

Im folgenden sollen daher zunächst Interpolations-, dann Approximationsmethoden behandelt werden.

§ 2.

Interpolationsmethoden.

Für die numerische Differentiation durch Interpolation an der Stelle $u = 0$ verwenden wir die Interpolationsformel von Stirling

$$y = f(u) = y_0 + \sum_{k=1}^{m} \left\{ \left[\frac{\Delta_{-k+1}^{2k-1} + \Delta_{-k}^{2k-1}}{2(2k-1)!} + \frac{\Delta_{-k}^{2k}}{(2k)!}\, u \right] \cdot u \cdot \prod_{\nu=1}^{k-1} (u^2 - \nu^2) \right\}.$$

Dabei ist

$$\Delta_n^m = \Delta_{n+1}^{m-1} - \Delta_n^{m-1} \quad \text{und} \quad \Delta_n^1 = y_{n+1} - y_n .$$

Differenziert man die Stirlingsche Formel nach u, so wird für $u = 0$

$$f'(0) = \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\Delta_{-k+1}^{2k-1} + \Delta_{-k}^{2k-1}}{2(2k-1)!} \cdot (-1)^{k-1} \cdot \prod_{\nu=1}^{k-1} \nu^2 \right],$$

oder ausführlich

$$f'(0) = \frac{\Delta_0^1 + \Delta_{-1}^1}{2} - \frac{\Delta_{-1}^3 + \Delta_{-2}^3}{12} + \frac{\Delta_{-2}^5 + \Delta_{-3}^5}{60} - \cdots .$$

Entwickelt man die Funktion l_x in der Umgebung einer Stelle x_0 nach der Stirlingschen Formel, so wird wegen (12)

$$\mu(x_0) = -\frac{1}{l_0} \left[\frac{\Delta_0^1 + \Delta_{-1}^1}{2} - \frac{\Delta_{-1}^3 + \Delta_{-2}^3}{12} + \cdots \right],$$

wobei zur Abkürzung $l_{x_0+\nu} = l_\nu$ gesetzt worden ist.

Entwickelt man die Funktion $\log l_x$ nach der Stirlingschen Interpolationsformel, so wird wegen (12)

$$\mu(x_0) = -\left[\frac{\Delta^1_0 + \Delta^1_{-1}}{2} - \frac{\Delta^3_{-1} + \Delta^3_{-2}}{12} + \cdots\right].$$

Da

$$\Delta^1_\nu = \log l_{\nu+1} - \log l_\nu = \log p_\nu$$

ist, kann man $\mu(x_0)$ auch aus den $\log p_\nu$ berechnen, was für die Anwendungen sehr zweckmäßig ist, da man dann die $\log l_x$ nicht erst zu berechnen braucht.

Wir wollen jetzt umgekehrt die $p(x)$, $q(x)$ und $l(x)$ aus den μ_x berechnen. Zunächst soll hierfür eine besonders einfache Formel abgeleitet werden, die man erhält, wenn man die Funktion l_x durch ein Polynom vom Grade 2 darstellt. Setzt man also für eine Umgebung der Stelle x_0

$$l(x) = a_0 \cdot [1 + a_1 y + a_2 y^2] \qquad (x - x_0 = y),$$

also

$$l'(x) = a_0 \cdot [a_1 + 2 a_2 y],$$

so wird

$$\mu(x) = -\frac{a_1 + 2 a_2 y}{1 + a_1 y + a_2 y^2}.$$

Da

$$l(x_0 + 1) = a_0(1 + a_1 + a_2) \quad \text{und} \quad l(x_0) = a_0$$

ist, wird

$$q(x_0) = -a_1 - a_2.$$

Nun ist

$$\mu(x_0) = \mu_0 = -a_1 \quad \text{und} \quad \mu(x_0 + 1) = \mu_1 = -\frac{a_1 + 2 a_2}{1 + a_1 + a_2}.$$

Hieraus erhält man

$$a_1 = -\mu_0 \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{\mu_0 - \mu_1 + \mu_0 \cdot \mu_1}{\mu_1 + 2}.$$

Dann ist

(I) $$q(x_0) = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2 + \mu_1}.$$

Wir wollen jetzt weitere Formeln für die Berechnung der $p(x)$, $q(x)$ und $l(x)$ aus den μ_x aufstellen. Dazu benutzen wir die Methode der Integration durch Interpolation und gehen aus von der Besselschen Interpolationsformel

$$g(u)=g\left(t+\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=0}^{m}\left\{\left[\frac{\Delta_{-k}^{2k}+\Delta_{-k+1}^{2k}}{2\cdot(2k)!}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\Delta_{-k}^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot t\right]\cdot\prod_{\nu=0}^{k-1}\left(t^2-\frac{(2\nu+1)^2}{4}\right)\right\}.$$

Integriert man $g\left(t+\frac{1}{2}\right)$ von $-\frac{1}{2}$ bis $+\frac{1}{2}$, so wird

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} g\left(t+\frac{1}{2}\right)dt=\sum_{k=0}^{m}\left\{\frac{\Delta_{-k}^{2k}+\Delta_{-k+1}^{2k}}{2\,(2k)!}\cdot\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\prod_{\nu=0}^{k-1}\left(t^2-\frac{(2\nu+1)^2}{4}\right)dt\right\},$$

da die Integrale über die ungeraden Funktionen verschwinden. Berechnet man die Integrale, so erhält man

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} g\left(t+\frac{1}{2}\right)dt=\frac{y_0+y_1}{2}-\frac{\Delta_0^2+\Delta_{-1}^2}{24}+\frac{11\left(\Delta_{-1}^4+\Delta_{-2}^4\right)}{1440}-\cdots\cdots.$$

Stellt man die Funktion μ_x durch die Besselsche Interpolationsformel dar, so ist wegen (13)

$$\log p(x_0)=-\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\mu\left(x_0+\frac{1}{2}+t\right)dt=-\frac{\mu_0+\mu_1}{2}+\frac{\Delta_0^2+\Delta_{-1}^2}{24}-\cdots\cdots.$$

§ 3.

Approximationsmethoden.

Wir wollen zunächst Formeln für die numerische Differentiation durch Approximation herleiten. Aus der Beziehung (12) erhält man dann folgende beiden Methoden:

1. Die Zahlen l_x werden in der Umgebung einer Stelle x_0 durch die ganze rationale Funktion

$$l(x)=\sum_{i=0}^{m}a_i\cdot y^i$$

dargestellt, wobei $y=x-x_0$ gesetzt worden ist. Da dann

$$l'(x)=\sum_{i=1}^{m}i\cdot a_i\cdot y^{i-1}$$

ist, wird

$$\mu(x_0) = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Wenn zur Bestimmung von $l(x)$ die l_x der Stellen x_0, $x_0 \pm n$ $(n = 1,2, \ldots, r;\ 2r+1 > m)$ benutzt werden, erhält man aus der Minimumbedingung

$$\sum_{y=-r}^{+r} (l(x) - l_x)^2 = \text{Min}$$

für die a_i die Normalgleichungen

$$\sum_{i=0}^{m} a_i [y^{i+j}] = [y^j l_x] \qquad (j = 0, 1, \ldots, m).$$

Die Koeffizienten a_0 und a_1 sind dann durch

$$D \cdot a_0 = |\,[y^j l_x]\,[y^{j+1}]\,[y^{j+2}] \cdot \ldots \cdot [y^{j+m}]\,|$$

und

$$D \cdot a_1 = |\,[y^j]\,[y^j l_x]\,[y^{j+2}] \cdot \ldots \cdot [y^{j+m}]\,|$$

bestimmt, wobei D die von Null verschiedene Determinante des Systems bedeutet. Daher ist

$$\mu_{m,2r+1}(x_0) = \frac{|\,[y^j l_x]\ \ [y^j]\ \ [y^{j+2}] \cdot \ldots \cdot [y^{j+m}]\,|}{|\,[y^j l_x]\,[y^{j+1}]\,[y^{j+2}] \cdot \ldots \cdot [y^{j+m}]\,|}.$$

Dabei bedeutet der Index m den Grad des Näherungspolynoms. Der Index $2r+1$ gibt die Anzahl der benutzten Funktionswerte l_x an. Macht man für m und r besondere Annahmen, so erhält man die folgenden Formeln:

(II) $$\mu_{2,3} = \frac{l_{-1} - l_1}{2 l_0}$$

(III) $$\mu_{2,5} = 3{,}5 \cdot \frac{2 l_{-2} + l_{-1} - l_1 - 2 l_2}{-3 l_{-2} + 12 l_{-1} + 17 l_0 + 12 l_1 - 3 l_2}$$

(IV) $$\mu_{3,5} = \frac{35}{12} \cdot \frac{-l_{-2} + 8 l_{-1} - 8 l_1 + l_2}{-3 l_{-2} + 12 l_{-1} + 17 l_0 + 12 l_1 - 3 l_2}$$

(V) $$\mu_{3,7} = \frac{1}{12} \cdot \frac{-22 l_{-3} + 67 l_{-2} + 58 l_{-1} - 58 l_1 - 67 l_2 + 22 l_3}{-2 l_{-3} + 3 l_{-2} + 6 l_{-1} + 7 l_0 + 6 l_1 + 3 l_2 - 2 l_3}$$

(VI) $$\mu_{4,5} = \frac{-l_{-2} + 8 l_{-1} - 8 l_1 + l_2}{12 l_0}$$

(VII) $$\mu_{4,7} = \frac{11}{12} \cdot \frac{-22\,l_{-3} + 67\,l_{-2} + 58\,l_{-1} - 58\,l_1 - 67\,l_2 + 22\,l_3}{5\,l_{-3} - 30\,l_{-2} + 75\,l_{-1} + 131\,l_0 + 75\,l_1 - 30\,l_2 + 5\,l_3}$$

(VIII) $$\mu_{6,7} = \frac{l_{-3} - 9\,l_{-2} + 45\,l_{-1} - 45\,l_1 + 9\,l_2 - l_3}{60\,l_0}.$$

2. Die Zahlen $\log l_x$ werden in der Umgebung einer Stelle x_0 durch die ganze rationale Funktion

$$\log l(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot y^i$$

dargestellt. Dann ist

$$\frac{d \log l(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{m} i \cdot a_i \cdot y^{i-1},$$

und es wird

$$\mu(x_0) = -a_1.$$

Bestimmt man wieder die a_i aus der Minimumbedingung

$$\sum_{y=-r}^{+r} (\log l(x) - \log l_x)^2 = \text{Min},$$

so wird

$$\mu_{m,2r+1}(x_0) = \frac{\begin{vmatrix} [y^j \log l_x] & [y^j] & [y^{j+2}] & \cdots & [y^{j+m}] \\ [y^j] & [y^{j+1}] & [y^{j+2}] & \cdots & [y^{j+m}] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [y^j] & [y^{j+1}] & [y^{j+2}] & \cdots & [y^{j+m}] \end{vmatrix}}.$$

Aus dieser Formel erhält man folgende spezielle Formeln:

(IX) $$\mu_{1,3} = \mu_{2,3} = -\frac{1}{2} \log [p_{-1} \cdot p_0]$$

(X) $$\mu_{3,5} = \mu_{4,5} = \frac{1}{12} [\log p_{-2} - 7 \log p_{-1} - 7 \log p_0 + \log p_1]$$

(XI) $$\mu_{3,7} = \mu_{4,7} = \frac{1}{252} [22 \log p_{-3} - 45 \log p_{-2} - 103 \log p_{-1} - 103 \log p_0 - 45 \log p_1 + 22 \log p_2]$$

(XII) $$\mu_{3,9} = \mu_{4,9} = \frac{1}{1188} [86 \log p_{-4} - 56 \log p_{-3} - 249 \log p_{-2} - 375 \log p_{-1} - 375 \log p_0 - 249 \log p_1 - 56 \log p_2 + 86 \log p_3]$$

(XIII) $$\mu_{5,7} = \mu_{6,7} = \frac{1}{60} [\log p_{-3} - 8 \log p_{-2} + 37 \log p_{-1} + 37 \log p_0 - 8 \log p_1 + \log p_2].$$

Wir wollen Approximationsmethoden auch für die Berechnung der $\log p(x)$ aus den μ_x herleiten, obwohl diesem Fall nur geringe praktische Bedeutung zukommt, da im allgemeinen die Methoden der Integration durch Interpolation ausreichen dürften. Wir stellen die μ_x in der Umgebung einer Stelle x_0 durch das Polynom

$$\mu(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i y^i$$

dar. Wegen (13) wird dann

$$-\log p(x_0) = \int_0^1 \sum_{i=0}^{m} a_i y^i \, dy = \sum_{i=0}^{m} \frac{a_i}{i+1}.$$

Wenn zur Bestimmung von $\mu(x)$ die μ_x der Stellen $x_0 - l$, $x_0 + l + 1$ ($l = 0,1, \ldots, r$) benutzt werden, erhält man aus

$$\sum_{y=-r}^{r+1} (\mu(x) - \mu_x)^2 = \text{Min}$$

die Normalgleichungen

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \{y^{i+j}\} = \{y^j \mu_x\} \qquad (j = 0, 1, \ldots, m),$$

wobei

$$\{y^k\} = [y^k] + (r+1)^k \quad \text{und} \quad \{y^j \mu_x\} = [y^j \mu_x] + (r+1)^j \cdot \mu_{r+1}$$

gesetzt worden ist. Wenn man nun das Gleichungssystem

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \{y^{i+j}\} + 0 \cdot \log p(x_0) = \{y^j \mu_x\} \qquad (j = 0, 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \cdot \frac{1}{i+1} + \qquad \log p(x_0) = 0$$

nach den Unbekannten $a_0, a_1, \ldots, a_m$, $\log p(x_0)$ auflöst, erhält man für $\log p(x_0)$

$$D \cdot \log p_{m,2r+2}(x_0) = \begin{vmatrix} \{y^0\} & \{y^1\} & \cdots\cdots & \{y^m\} & \{\mu_x\} \\ \{y^1\} & \{y^2\} & \cdots\cdots & \{y^{m+1}\} & \{y\,\mu_x\} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \{y^m\} & \{y^{m+1}\} & \cdots\cdots & \{y^{2m}\} & \{y^m \mu_x\} \\ 1 & \frac{1}{2} & \cdots\cdots & \frac{1}{m+1} & 0 \end{vmatrix},$$

wobei D die Determinante $D = |\{y^{i+j}\}|$ bedeutet. Macht man wieder für m und r besondere Annahmen, so erhält man die Formeln

$$\text{(XIV)} \qquad -\log p_{0,2} = -\log p_{1,2} = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2}$$

$$\text{(XV)} \qquad -\log p_{2,4} = -\log p_{3,4} = \frac{1}{24}[-\mu_{-1} + 13\mu_0 + 13\mu_1 - \mu_2]$$

$$\text{(XVI)} \qquad -\log p_{2,6} = -\log p_{3,6} = \frac{1}{336}[-29\mu_{-2} + 73\mu_{-1} + 124\mu_0 + 124\mu_1 + 73\mu_2 - 29\mu_3].$$

Aus den Approximationsformeln dieses Paragraphen erhält man die Interpolationsformeln des § 2, indem man $2r+1$ bzw. $2r+2$ gleich $m+1$ setzt.

§ 4.

Anwendung der Formeln bei der Ausgleichung von Sterbetafeln.

Wir haben die Formeln des § 3 nur deshalb so ausführlich behandelt, weil sie uns geeignet scheinen, bei der Ausgleichung von Sterbetafeln herangezogen zu werden. Das Ausgleichungsverfahren, das wir vorschlagen, besteht einfach darin, daß die Formeln in zweckmäßiger Auswahl und Reihenfolge wiederholt angewendet werden. Man berechnet also aus den unausgeglichenen Werten einer Tafel nach einer Approximationsformel die μ_x. Aus diesen werden nach einer weiteren Approximationsformel die $\log p_x$ berechnet, aus denen wiederum die μ_x bestimmt werden können. Das Verfahren setzt man solange fort, bis ein hinreichend glatter Verlauf der Tafel erreicht worden ist. Allerdings bleiben dabei die Werte des Tafelanfangs und des Tafelendes unausgeglichen. Falls auch diese Werte bestimmt werden sollen, muß ein Extrapolationsverfahren herangezogen werden.

Wir wollen das Verfahren für die Deutsche Vereinstafel 1926 durchführen. Auf die unausgeglichenen l_x dieser Tafel wollen wir der Reihe nach die Formeln (V), (XVI), (XI) und (I) anwenden. Die folgende Tabelle enthält die Ergebnisse der Rechnung. Zum Vergleich haben wir in den beiden letzten Spalten die unausgeglichenen und die von Abel ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten der Vereinstafel angegeben.

Tabelle 6.

x	l_x	$10^3 \cdot \mu_x$	$-10^3 \cdot \log p_x$	$10^3 \cdot \mu_x$	$10^3 \cdot q_x$	$10^3 \cdot q_x$ unausgegl.	$10^3 \cdot q_x$ Abel
11	100000					0,00	3,41
12	100000					2,04	3,39
13	99796					0,00	3,37
14	99796	2,15				3,45	3,35
15	99462	2,58				3,20	3,33
16	99143	2,90	2,67			1,82	3,31
17	98963	2,44	2,79			2,88	3,30
18	98678	2,84	3,01			3,07	3,29
19	98375	3,37	3,39	3,20	3,31	3,60	3,28
20	98021	3,43	3,51	3,44	3,48	3,29	3,27
21	97698	3,54	3,49	3,53	3,50	3,53	3,27
22	97353	3,45	3,45	3,48	3,44	3,61	3,28
23	97002	3,43	3,36	3,41	3,36	3,09	3,29
24	96702	3,32	3,30	3,33	3,30	3,48	3,31
25	96366	3,26	3,26	3,27	3,27	3,22	3,34
26	96055	3,27	3,29	3,27	3,29	3,21	3,37
27	95747	3,29	3,37	3,32	3,36	3,36	3,41
28	95425	3,45	3,47	3,42	3,46	3,58	3,47
29	95084	3,53	3,57	3,51	3,56	3,52	3,56
30	94749	3,61	3,69	3,62	3,70	3,63	3,69
31	94405	3,75	3,90	3,79	3,90	3,92	3,87
32	94035	4,05	4,18	4,03	4,17	4,13	4,10
33	93647	4,34	4,50	4,33	4,48	4,60	4,39
34	93216	4,66	4,80	4,64	4,80	4,67	4,75
35	92781	4,97	5,16	4,97	5,16	5,26	5,17
36	92293	5,33	5,58	5,36	5,58	5,44	5,62
37	91791	5,83	6,08	5,83	6,06	6,08	6,10
38	91232	6,33	6,59	6,33	6,55	6,64	6,58
39	90627	6,88	7,05	6,82	7,02	7,03	7,08
40	89990	7,28	7,53	7,29	7,51	7,53	7,59
41	89312	7,73	8,07	7,80	8,07	7,87	8,10
42	88609	8,40	8,73	8,40	8,68	8,74	8,64
43	87835	9,07	9,37	9,03	9,30	9,51	9,23
44	86999	9,72	9,96	9,65	9,92	9,78	9,88
45	86148	10,23	10,63	10,29	10,60	10,59	10,61
46	85236	10,98	11,44	11,02	11,40	11,25	11,43
47	84277	11,93	12,42	11,92	12,34	12,51	12,34
48	83223	12,94	13,46	12,92	13,36	13,29	13,33
49	82117	14,02	14,54	13,99	14,45	14,48	14,39
50	80928	15,07	15,73	15,12	15,61	15,59	15,52
51	79666	16,32	16,99	16,35	16,85	16,73	16,73
52	78333	17,72	18,33	17,65	18,14	18,31	18,04

Tabelle 6 (Fortsetzung).

x	l_x	$10^3 \cdot \mu_x$	$10^3 \cdot \log p_x$	$10^3 \cdot \mu_x$	$10^3 \cdot q_x$	$10^3 \cdot q_x$ unausgegl.	$10^3 \cdot q_x$ Abel
53	76899	18,99	19,67	18,98	19,48	19,66	19,45
54	75387	20,38	21,12	20,38	20,93	20,47	20,99
55	73844	21,86	22,81	21,94	22,55	22,82	22,67
56	72159	23,72	24,66	23,69	24,34	24,27	24,51
57	70408	25,71	26,67	25,61	26,31	26,49	26,51
58	68453	27,69	28,90	27,75	28,55	28,29	28,68
59	66603	30,08	31,55	30,21	31,09	30,98	31,04
60	64540	32,96	34,51	33,00	33,87	33,84	33,63
61	62356	36,14	37,49	35,96	36,72	37,23	36,44
62	60035	38,98	40,37	38,90	39,55	39,53	39,45
63	57661	41,78	43,35	41,85	42,45	42,01	42,59
64	55239	44,85	46,64	44,96	45,55	45,79	45,85
65	52710	48,47	50,19	48,36	48,95	49,10	49,22
66	50122	52,12	54,12	52,09	52,68	52,65	52,79
67	47483	56,07	58,46	56,22	56,79	56,34	56,69
68	44808	60,87	63,31	60,81	61,32	61,72	61,05
69	42042	65,92	68,61	65,86	66,26	66,61	66,01
70	39242	71,41	74,35	71,39	71,65	70,95	71,59
71	36457	77,35	80,72	77,47	77,56	77,90	77,68
72	33617	84,11	87,76	84,18	83,93	84,06	84,06
73	30791	91,43	95,14	91,35	90,59	90,60	90,64
74	28002	99,08	102,64	98,78	97,43	97,81	97,62
75	25263	106,53	110,66	106,44	104,71	105,55	105,10
76	22596	114,77	119,69	115,03	113,09	110,89	113,18
77	20091	124,91	131.02	125,32	122,83	123,46	121,93
78	17610	136,51	143,62	137,19	133,44	134,08	131,38
79	15249	150,85	155,74	149,67	143,85	143,43	141,56
80	13062	161,86	167,12	161,23	153,42	158,19	152,52
81	10996	171,78	177,34	172,00	163,09	157,53	164,35
82	9264	183,83	190,27	183,69	173,60	173,99	176,96
83	7652	196,33	206,62	197,85	186.80	189,98	190,22
84	6198	216,60	225,70	216,14	202,65	195,59	204,18
85	4986	236,74	249.22	237,25	219,70	226,10	218,95
86	3859	258,60	269,92	259,07	236,53	236,12	234,56
87	2947	284,79	290,34	280,28	253,02	250,17	251,02
88	2210	296,29	311,90	302,22	270,18	274,43	268,34
89	1604	321,21	334,54	326,31	284,75	258,75	286,51
90	1189	343,47	344,87	340,02	287,36	325,71	305,48
91	801	349,48	318,14	329,32	273,37	271,74	325,20
92	584	306,83	284,42	299,22		242,42	345,62
93	442	251,81	286,00			177,78	366,69
94	364	297,47	349,48			342,86	388,36

Tabelle 6 (Fortsetzung).

x	l_x	$10^3 \cdot \mu_x$	$-10^3 \cdot \log p_x$	$10^3 \cdot \mu_x$	$10^3 \cdot q_x$	$10^3 \cdot q_x$ unausgegl.	$10^3 \cdot q_x$ Abel
95	239	378,30				333,33	410,61
96	159	410,19				285,71	433,43
97	114	199,92				125,00	456,80
98	100					0,00	480,70
99	100					428,57	505,10
100	57					500,00	529,97

5. Kapitel.

Ein numerisches Beispiel.

§ 1.

Berechnung der Sterbeintensitäten.

Wir wollen die Ausgleichung nach Gompertz-Makehamschen Polynomen für die „Deutsche Vereinstafel 1926“ (Abelsche Tafel) durchführen. Dieser Tafel entnehmen wir die unausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x Zunächst sollen die Sterbeintensitäten der Tafel nochmals berechnet werden. Von den verschiedenen Formeln, die uns zur Verfügung stehen, wählen wir die stark ausgleichende Formel (XII). In dieser Formel ist unter log der natürliche Logarithmus zu verstehen. Da es indessen bequemer ist, mit Briggschen Logarithmen zu rechnen, multiplizieren wir beide Seiten der Formel mit M, dem Modulus des Briggschen Logarithmensystems. Allerdings erhalten wir dann aus der Formel nur die mit M multiplizierten Sterbeintensitäten. Es zeigt sich aber, daß es praktisch ist, die Division durch M nicht erst auszuführen, sondern die Werte $M\mu_x$ der weiteren Ausgleichung zu unterwerfen, da aus den Zahlen $M\mu_x$ in einfacher Weise die Log p_x gewonnen werden können.

Das Ergebnis der Rechnung enthält die Tabelle 7.

Tabelle 7.

x	$10^3 \cdot M\mu_x$	x	$10^3 \cdot M\mu_x$	x	$10^3 \cdot M\mu_x$	x	$10^3 \cdot M\mu_x$
14	0,898						
15	1,083	35	2,158	55	9,539	75	46,165
16	1,152	36	2,331	56	10,283	76	50,032
17	1,258	37	2,528	57	11,123	77	54,312
18	1,224	38	2,755	58	12,050	78	59,775
19	1,374	39	2,955	59	13,112	79	65,028
20	1,526	40	3,162	60	14,353	80	69,830
21	1,520	41	3,392	61	15,605	81	74,873
22	1,509	42	3,646	62	16,889	82	79,598
23	1,478	43	3 922	63	18,178	83	85,940
24	1,454	44	4,185	64	19,542	84	94,009
25	1,413	45	4,475	65	20,975	85	103,003
26	1,419	46	4,786	66	22,609	86	113,538
27	1,454	47	5,169	67	24,454	87	120,496
28	1,474	48	5,618	68	26,395	88	131,722
29	1,527	49	6,071	69	28,585	89	142,323
30	1,574	50	6,563	70	31,018	90	150,093
31	1,650	51	7,111	71	33,663	91	138,345
32	1,746	52	7,660	72	36,507	92	127,113
33	1,883	53	8,237	73	39,736	93	128,353
34	2,017	54	8,851	74	42,886	94	143,363
						95	160,035
						96	129,768

§ 2.

Ausgleichung nach Gompertz-Makehamschen Polynomen.

Bei der Ausgleichung des Gültigkeitsbereiches des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern verwenden wir der Einfachheit halber Gompertz-Makehamsche Polynome vom Grade 2

$$P_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}\, y + k_2 \cdot a_{n,1}\, y^2. \tag{14}$$

Für die Rechnung soll nun $r = 3$ gesetzt werden. Dann erhält man für die Konstante k_2 die Bestimmungsgleichung

$$k_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{[(y^2 - 4)\,\mu_x]}{[y\,\mu_x]},$$

während $a_{n,1}$ und $a_{n,0}$ aus den Gleichungen

$$a_{n,1} = \frac{[y\,\mu_x] + k_2\,[(y^2-4)\,\mu_x]}{28\,(1+3\,k_2{}^2)}$$

$$a_{n,0} = \frac{[\mu_x]}{7} - 4\,k_2 \cdot a_{n,1}$$

berechnet werden müssen. In der folgenden Tabelle 8 haben wir die Rechnung durchgeführt.

Tabelle 8.

x	$10\,\frac{[(y^2-4)\,M\mu_x]}{[M\mu_x]}$	$10\cdot\frac{[y\,M\mu_x]}{[M\mu_x]}$	$10^3\cdot a_{n,0}$	x	$10\,\frac{[(y^2-4)\,M\mu_x]}{[M\mu_x]}$	$10\cdot\frac{[y\,M\mu_x]}{[M\mu_x]}$	$10^3\cdot a_{n,0}$
28	0,4529	1,0408					
29	0,5284	1,3584					
30	0,7588	1,7280		55	0,4417	3,0075	9,561
31	0,7539	2,1169		56	0,4955	3,0886	10,327
32	0,6706	2,3990		57	0,5710	3,2050	11,185
33	0,5270	2,6634		58	0,5595	3,2925	12,133
34	0,4884	2,8499	2,021	59	0,4499	3,3276	13,167
35	0,5377	3,0036	2,176	60	0,2904	3,2905	14,283
36	0,4860	3,0444	2,346	61	0,1653	3,2028	15,475
37	0,2932	3,0454	2,527	62	0,1289	3,0795	16,742
38	0,1457	3,0035	2,721	63	0,2189	2,9778	18,090
39	0,1512	2,9274	2,932	64	0,3376	2,9500	19,517
40	0,2509	2,8627	3,158	65	0,4071	2,9614	21,039
41	0,2948	2,7930	3,393	66	0,4412	3,0115	22,686
42	0,2425	2,7727	3,636	67	0,4593	3,0784	24,491
43	0,2028	2,7485	3,895	68	0,4525	3,1440	26,477
44	0,2955	2,7604	4,178	69	0,4429	3,1853	28,663
45	0,4739	2,8336	4,491	70	0,4599	3,2287	31,073
46	0,5519	2,9238	4,832	71	0,3843	3,2357	33,672
47	0,5023	3,0266	5,203	72	0,2687	3,1927	36,466
48	0,4368	3,1071	5,614	73	0,2902	3,1579	39,496
49	0,3264	3,1297	6,063	74	0,3504	3,1462	42,784
50	0,2654	3,0860	6,551	75	0,5463	3,2209	46,451
51	0,2459	3,0189	7,072	76	0,6219	3,2911	50,458
52	0,2528	2,9808	7,627	77	0,4358	3,3066	54.700
53	0,3003	2,9543	8,222	78	0,1921	3,2483	59,224
54	0,3882	2,9590	8,866	79	−0,0171	3,0847	
				80	0,0457	2,9503	

Wir bemerken, daß die Zahlen

$$\frac{[y M\mu_x]}{[M\mu_x]},$$

die den Nenner von k_2 bilden, annähernd konstant sind. Dasselbe gilt von den Zahlen

$$\frac{[(y^2-4)M\mu_x]}{[M\mu_x]},$$

wenn auch bei ihnen größere Schwankungen auftreten, die aber hauptsächlich auf die Unregelmäßigkeiten der unausgeglichenen Werte zurückzuführen sind. Nur die Werte der Alter 28 bis etwa 33 und der Alter 79 bis 80 fallen ganz aus dem Rahmen der übrigen Werte. Wir werden daher diese Werte bei der Berechnung von k_2 ausschließen, indem wir als Grenzen $x_1 = 34$ und $x_2 = 78$ festsetzen. Addiert man dann die beiden ersten Spalten der Tabelle 8 zwischen diesen Grenzen, so wird

$$10 \cdot \overline{[(y^2-4)M\mu_x]} = 16{,}5439\,; \quad 10\overline{[yM\mu_x]} = 137{,}6606\,,$$

und man erhält

$$k_2 = 0{,}04006\,.$$

Für die Genauigkeit der Rechnung genügt es, wenn wir

$$k_2 = 0{,}04$$

setzen. Mit diesem Wert sind die $a_{n,0}$ der Tabelle 8 berechnet worden.

Um einen möglichst gleichmäßigen Verlauf der ausgeglichenen Werte zu erhalten, wollen wir unser Ausgleichungsverfahren nochmals anwenden. Man könnte dabei den Wert von k_2 beibehalten. Dann brauchten nur die Koeffizienten $a_{n,0}$ der Parabeln (14) bestimmt zu werden. Wir wollen aber auch die Berechnung von k_2 wiederholen, da der Wert $k_2 = 0{,}04$ etwas zu groß ausgefallen ist, was auf die Schwankungen der unausgeglichenen Werte zurückzuführen ist. Wir benutzen für die nochmalige Ausgleichung die $a_{n,0}$ der Alter 34 bis 78. Dann ist $x_1 = 37$ und $x_2 = 75$. Tabelle 9 enthält das Ergebnis der Rechnung. Für die Bestimmung von k_2 erhält man

$$10 \cdot \overline{[(y^2-4)\cdot M\mu_x]} = 14{,}0945\,; \quad 10\overline{[yM\mu_x]} = 119{,}0351\,.$$

Dann ist

$$k_2 = 0{,}0395\,.$$

Mit diesem Wert sind die $a_{n,0}$ der Tabelle 9 berechnet worden.

Tabelle 9.

x	$10\frac{[(y^2-4)M\mu_x]}{[M\mu_x]}$	$10\cdot\frac{[yM\mu_x]}{[M\mu_x]}$	$10^3\cdot a_{n,0}$	x	$10\frac{[(y^2-4)M\mu_x]}{[M\mu_x]}$	$10\cdot\frac{[yM\mu_x]}{[M\mu_x]}$	$10^3\cdot a_{n,0}$
				55	0,4383	3,0778	9,588
				56	0,4627	3,1300	10,368
37	0,3277	2,9629	2,525	57	0,4559	3,1776	11,221
38	0,3033	2,9502	2,719	58	0,4170	3,2086	12,152
39	0,2631	2,9156	2,926	59	0,3675	3,2123	13,165
40	0,2260	2,8726	3,145	60	0,3282	3,1898	14,262
41	0,2262	2,8332	3,379	61	0,2993	3,1494	15,440
42	0,2753	2,8108	3,629	62	0,2846	3,1019	16,700
43	0,3364	2,8133	3,898	63	0,2901	3,0596	18,046
44	0,3747	2,8412	4,186	64	0,3169	3,0343	19,489
45	0,3944	2,8899	4,499	65	0,3576	3,0311	21,043
46	0,4026	2,9432	4,841	66	0,3995	3,0498	22,724
47	0,4048	2,9906	5,215	67	0,4310	3,0876	24,553
48	0,3920	3,0234	5,623	68	0,4351	3,1284	26,540
49	0,3603	3,0399	6,065	69	0,4156	3,1592	28,712
50	0,3271	3,0402	6,544	70	0,3920	3,1770	31,082
51	0,3155	3,0291	7,062	71	0,3772	3,1840	33,661
52	0,3206	3,0158	7,619	72	0,3945	3,1945	36,478
53	0,3474	3,0133	8,221	73	0,4251	3,2108	39,549
54	0,3933	3,0350	8,875	74	0,4237	3,2242	42,880
				75	0,3920	3,2270	46,483

§ 3.

Die Ausgleichung des Tafelanfangs.

Da die Ausgleichung einer Sterbetafel nach Gompertz-Makehamschen Polynomen nur im Gültigkeitsbereich des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern vorgenommen werden kann, bleiben die Sterbeintensitäten des Tafelanfangs und des Tafelendes unausgeglichen. Wenn auch diese Werte ausgeglichen werden sollen, müssen andere Verfahren benutzt werden. Die Ausgleichung der Werte des Tafelanfangs kann auf folgende Weise vorgenommen werden.

Wir stellen die $M\mu_x$ in der Umgebung einer Stelle n durch ein Polynom 2. Grades dar, dessen Koeffizienten aus den $2r+1$ Sterbeintensitäten $\mu_{n\pm l}$ $(l=0{,}1, \ldots, r)$ nach der Methode der kleinsten Quadratsumme bestimmt werden sollen. Wir setzen wieder $r=3$ und erhalten den ausgeglichenen Wert durch die Formel

$$(15)\quad \begin{cases} M\mu(n) \\ = \frac{1}{21} \cdot M \cdot (-2\mu_{n-3} + 3\mu_{n-2} + 6\mu_{n-1} + 7\mu_n + 6\mu_{n+1} + 3\mu_{n+2} - 2\mu_{n+3}) . \end{cases}$$

Tabelle 10.

	unausgeglichen $10^3 \cdot M\mu_x$	1. Ausgleichung $10^3 \cdot M\mu_x$	2. Ausgleichung $10^3 \cdot M\mu_x$
14	0,898		
15	1,083		
16	1,152	(1,152)	
17	1,258	1,218	
18	1,224	1,295	
19	1,374	1,387	1,389
20	1,526	1,465	1,466
21	1,520	1,526	1,510
22	1,509	1,520	1,513
23	1,478	1,478	1,487
24	1,454	1,446	1,450
25	1,413	1,427	1,427
26	1,419	1,424	1,427
27	1,454	1,443	1,444
28	1,474	1,479	1,475
29	1,527	1,522	1,520
30	1,574	1,575	1,577
31	1,650	1,653	1,654
32	1,746	1,752	1,754
33	1,883	1,877	1,878
34	2,021	2,020	2,019
35	2,176	2,178	2,176
36	2,346	2,344	2,345
37	2,525		
38	2,719		
39	2,926		

Bei der Vereinstafel 1926 haben wir bereits die Sterbeintensitäten der Alter 37 bis 75 ausgeglichen. Die Werte, die wir dabei erhalten haben, sollen bei der weiteren Ausgleichung nicht mehr abgeändert werden. Wir müssen dann für einen möglichst glatten und gleichmäßigem Übergang in diese Werte sorgen. Das wird erreicht, wenn wir bei der Ausgleichung des Tafelanfangs folgende Sterbeintensitäten benutzen: Für die Alter 14 bis 33 die unausgeglichenen $M\mu_x$, für die Alter 34 bis 36 die einmal ausgeglichenen $a_{n,0}$ und für die Alter 37 bis 39 die zweimal ausgeglichenen $a_{n,0}$.

Dann erhält man durch die Formel (15) ausgeglichene Sterbeintensitäten für die Alter 17 bis 36. Diese Werte stehen in der zweiten Spalte der Tabelle 10.

Um einen möglichst glatten Verlauf der Werte zu erhalten, wiederholen wir das Verfahren. Für die Alter 17 bis 36 benutzen wir die soeben berechneten $M\mu_x$, während wir für die Alter 37 bis 39 wieder die zweimal ausgeglichenen $a_{n,0}$ verwenden. Dann erhalten wir durch die Formel (15) zweimal ausgeglichene $M\mu_x$ für die Alter 20 bis 36. Aus praktischen Gründen ist noch ein zweimal ausgeglichener Wert $M\mu_{19}$ berechnet worden. Diese zweimal ausgeglichenen Sterbeintensitäten stehen in der dritten Spalte der Tabelle 10.

Nach diesem Verfahren bleiben die Werte der jüngeren Altersklassen unausgeglichen. Da diese Werte aber praktisch von geringer Bedeutung sind, wollen wir auf ihre Ausgleichung, die nach einem Extrapolationsverfahren zu geschehen hätte, verzichten.

§ 4.

Die Ausgleichung des Tafelendes.

Die Formel (15), die wir für die Ausgleichung des Tafelanfangs aufgestellt haben, benutzen wir auch bei der Ausgleichung des Tafelendes, wobei wir folgende Sterbeintensitäten heranziehen: Für die Alter 73 bis 75 die zweimal ausgeglichenen $a_{n,0}$, für die Alter 76 bis 78 die einmal ausgeglichenen $a_{n,0}$, für die Alter 79 bis 96 die unausgeglichenen $M\mu_x$. Wir wiederholen das Verfahren dreimal, damit die Unregelmäßigkeiten der unausgeglichenen $M\mu_x$, die in den höheren Altersklassen besonders stark auftreten, möglichst beseitigt werden. Tabelle 11 enthält die Ergebnisse der Rechnung. Danach erhalten wir ausgeglichene Werte nur bis zum Alter 87.

Wenn wir auch Sterbeintensitäten für die höheren Alter erhalten wollen, müssen wir ein anderes Verfahren anwenden. Wollte man dazu die unausgeglichenen Werte benutzen, die in den höchsten Altern stark abnehmen, so würde man einen Sterblichkeitsverlauf erhalten, der nicht mit der Erfahrung in Einklang steht. Bei den meisten Sterbetafeln sind nämlich die μ_x der höheren Alter monoton steigend und konvex nach unten. Diese beiden Eigenschaften stehen ziemlich sicher fest; wir müssen sie daher auch bei unserer Tafel verlangen. Dann müssen wir aber über das Alter 87 hinaus so extrapolieren, daß ein zweckmäßiger Sterblichkeitsverlauf entsteht. Die Extrapolation geschieht am besten nach einer analytischen Formel.

Tabelle 11.

x	unausgeglichen $10^3 \cdot M\mu_x$	1. Ausgleichung $10^3 \cdot M\mu_x$	2. Ausgleichung $10^3 \cdot M\mu_x$	3. Ausgleichung $10^3 \cdot M\mu_x$
73	39,549			
74	42,880			
75	46,483			
76	50,458	50,351	50,418	50,480
77	54,700	54,767	54,860	54,879
78	59,224	59,575	59,598	59,601
79	65,028	64,673	64,571	64,473
80	69,830	69,686	69,525	69,391
81	74,873	74,625	74,506	74,508
82	79,598	79,882	80,035	80,149
83	85,940	86,196	86,551	86,615
84	94,009	94,304	94,202	94,158
85	103,003	102,999	102,746	102,947
86	113,538	112,211	112,534	113,019
87	120,496	122,038	123,287	123,747
88	131,722	133,765	133,601	
89	142,323	142,018	140,420	
90	150,093	143,498	141,108	
91	138,345	137,786		
92	127,113	131,697		
93	128,353	136,036		
94	143,363			
95	160,035			
96	129,768			

Man könnte hierfür die Gompertz-Makehamsche Funktion $\mu(x)$ nehmen. Diese Funktion liefert aber logarithmisch konvexe Sterbeintensitäten; sie ist daher nicht besonders gut geeignet für die Darstellung der Werte in den höchsten Altern, da man einen Sterblichkeitsverlauf erhält, bei dem die Sterbeintensitäten sehr stark ansteigen. Diesen Nachteil der Gompertz-Makehamschen Formel vermeiden wir, wenn wir für die Extrapolation die Formel

$$\mu(x) = \left[a\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right]^b \qquad (a>0,\ b>1)$$

verwenden. Diese Funktion ist monoton steigend, denn es ist

$$\mu'(x) = a^b \cdot b \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{b-1} \cdot \frac{1}{x^2} > 0\,.$$

Sie ist aber auch konvex nach unten, wenn b geeignet bestimmt wird. Denn es ist

$$\operatorname{sgn} \mu''(x) = \operatorname{sgn} [-2x+1+b] = +1,$$

wenn $b > 2x-1$ gewählt wird. Dagegen ist $\mu(x)$ nicht logarithmisch konvex nach unten. Denn

$$(\log \mu(x))'' = -b \cdot \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

ist für die in Betracht kommenden x negativ. Wir sehen also, daß diese Formel für die Berechnung der Sterbeintensitäten in den höheren Altern sehr zweckmäßig sein wird.

Die Konstanten a und b der Funktion wollen wir aus den dreimal ausgeglichenen Sterbeintensitäten der Alter 80 bis 87 nach der Methode der kleinsten Quadratsumme bestimmen. Wir setzen also

$$\operatorname{Log}\left(10^3 \cdot M \cdot \mu(x)\right) = A + b \cdot \operatorname{Log} \frac{x-1}{x},$$

wobei $A = b \cdot \operatorname{Log} a$ ist. Man erhält dann folgende Konstanten:

$$A = 4{,}90830 \text{ und } b = 562{,}838.$$

In der folgenden Tabelle sind für die Alter 80 bis 87 die Ergebnisse der Rechnung enthalten, wobei wir die nach der Formel berechneten Sterbeintensitäten mit $\mu(x)$ bezeichnet haben.

Tabelle 12.

x	$10^3 \cdot M\mu_x$	$10^3 \cdot M\mu(x)$	x	$10^3 \cdot M\mu_x$	$10^3 \cdot M\mu(x)$
80	69,391	68,166	84	94,158	95,689
81	74,508	74,437	85	102,947	103,642
82	80,149	81,094	86	113,019	112,023
83	86,615	88,187	87	123,747	120,893

Man sieht, daß die Formel recht gut den Verlauf der μ_x wiederzugeben vermag. Wir wollen daher mit ihr über das Alter 87 hinaus extrapolieren. Man erhält dann die Werte $M\mu(x)$ der Tabelle 13.

Tabelle 13.

x	$10^3 \cdot M\mu(x)$	x	$10^3 \cdot M\mu(x)$	x	$10^3 \cdot M\mu(x)$
88	130,229	93	184,381	98	251,879
89	140,050	94	196,750	99	267,109
90	150,358	95	209,731	100	282,893
91	161,174	96	223,221	101	299,260
92	172,521	97	237,271	102	316,247

Wir müssen noch für einen gleichmäßigen Übergang der Tafel in die Werte dieser Funktion sorgen. Wir gleichen dazu wieder nach der Formel (15) aus. Für die Rechnung wählen wir folgende Sterbeintensitäten: Für die Alter 73 bis 75 die zweimal ausgeglichenen $a_{n,0}$, für die Alter 76 bis 79 die dreimal ausgeglichenen Werte $M\mu_x$, für die Alter 80 bis 85 die nach der analytischen Formel berechneten Werte $M\mu(x)$. Das Verfahren führen wir zweimal durch. Die Ergebnisse enthält die Tabelle 14.

Tabelle 14.

x	$10^3 \cdot M\mu_x$	1. Ausgleichung $10^3 \cdot M\mu_x$	2. Ausgleichung $10^3 \cdot M\mu_x$
73	39,599		
74	42,880		
75	46,483		
76	50,480	50,516	50,601
77	54,879	55,058	54,888
78	59,601	59,401	59,337
79	64,473	63,939	63,956
80	68,166	68,885	68,909
81	74,437	74,477	74,581
82	81,094	80,892	80,990
83	88,187		
84	95,689		
85	103,642		

§ 5.

Berechnung der ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten.

Nachdem wir die Werte $M\mu_x$ für die ganze Tafel ausgeglichen haben, können aus ihnen die ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten berechnet werden. Von den Formeln, die uns hierfür zur

Verfügung stehen, wählen wir die sehr bequeme Formel (XV). Aus den Zahlen Log $p(x)$ erhält man durch einfache Rechnungen die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x.

Die folgende Tabelle 15 enthält das Ergebnis der Ausgleichung. In den ersten beiden Spalten der Tabelle stehen die unausgeglichenen und die ausgeglichenen Werte $M\mu_x$. Die nächsten drei Spalten enthalten Sterbenswahrscheinlichkeiten, und zwar 1. die von uns ausgeglichenen q_x, 2. die unausgeglichenen q_x, 3. die von Abel ausgeglichenen q_x. In der letzten Spalte stehen die ausgeglichenen Sterbeintensitäten.

§ 6.

Untersuchung der Gültigkeit des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern.

Wir haben bei unserem Ausgleichungsverfahren die Forderung aufgestellt, daß die ausgeglichene Tafel dem Gesetz vom gleichmäßigen Altern angenähert genügen soll. Wir wollen daher untersuchen, ob dieses Gesetz von unserer Tafel erfüllt wird. Diese Untersuchung kann nach Kap. 1 § 2 auf den Fall $n = 2$ beschränkt werden. Für je zwei Alter x und y berechnen wir dann das Zwischenalter w aus der Gleichung

$$\mu(x) + \mu(y) = 2\mu(w) \tag{16}$$

durch Interpolation in der Tafel. Dann muß im Gültigkeitsbereich des Gesetzes vom gleichmäßigen Altern für jedes n

$$\mu(x+n) + \mu(y+n) = 2\mu(w+n)$$

sein.

In der Tabelle 16 sind die aus Gleichung (16) für gerades x und y berechneten Zwischenalter w enthalten. Wir haben w durch lineare Interpolation bestimmt und konnten w nur auf eine Kommastelle genau berechnen, da eine größere Genauigkeit mit der linearen Interpolation nicht erreicht werden kann. Untersucht man nun in dieser Tabelle die Diagonalen, die von links oben nach rechts unten führen, so müssen die Alter jeder Diagonale immer um zwei Jahre zunehmen, wenn das Gesetz vom gleichmäßigen Altern erfüllt ist. Man sieht, daß diese Eigenschaft bei unserer Tafel mit genügender Genauigkeit zutrifft.

Tabelle 15.

x	unausgeglichen $10^3 \cdot M\mu_x$	ausgeglichen $10^3 \cdot M\mu_x$	ausgeglichen $10^3 \cdot q_x$	unausgeglichen $10^3 \cdot q_x$	Abel $10^3 \cdot q_x$	ausgeglichen $10^3 \cdot \mu_x$
19	1,374	1,389				3,197
20	1,526	1,466	3,43	3,29	3,27	3,376
21	1,520	1,510	3,48	3,53	3,27	3,477
22	1,509	1,513	3,45	3,61	3,28	3,483
23	1,478	1,487	3,37	3,09	3,29	3,423
24	1,454	1,450	3,30	3,48	3,31	3,338
25	1,413	1,427	3,28	3,22	3,34	3,286
26	1,419	1,427	3,30	3,21	3,37	3,285
27	1,454	1,444	3,35	3,36	3,41	3,325
28	1,474	1,475	3,44	3,58	3,47	3,397
29	1,527	1,520	3,56	3,52	3,56	3,499
30	1,574	1,577	3,71	3,63	3,69	3,632
31	1,650	1,654	3,91	3,92	3,87	3,808
32	1,746	1,754	4,17	4,13	4,10	4,039
33	1,883	1,878	4,47	4,60	4,39	4,323
34	2,017	2,019	4,82	4,67	4,75	4,649
35	2,158	2,176	5,19	5,26	5,17	5,010
36	2,331	2,345	5,59	5,44	5,62	5,399
37	2,528	2,525	6,02	6,08	6,10	5,814
38	2,755	2,719	6,48	6,64	6,58	6,261
39	2,955	2,926	6,96	7,03	7,08	6,737
40	3,162	3,145	7,48	7,53	7,59	7,242
41	3,392	3,379	8,03	7,87	8,10	7,780
42	3,646	3,629	8,62	8,74	8,64	8,357
43	3,922	3,898	9,26	9,51	9,23	8,975
44	4,185	4,186	9,94	9,78	9,88	9,639
45	4,475	4,499	10,69	10,59	10,61	10,360
46	4,786	4,841	11,50	11,25	11,43	11,147
47	5,169	5,215	12,38	12,51	12,34	12,008
48	5,618	5,623	13,36	13,29	13,33	12,947
49	6,071	6,065	14,41	14,48	14,39	13,966
50	6,563	6,544	15,53	15,59	15,52	15,068
51	7,111	7,062	16,75	16,73	16,73	16,260
52	7,660	7,619	18,06	18,31	18,04	17,544
53	8,237	8,221	19,48	19,66	19,45	18,930
54	8,851	8,875	21,02	20,47	20,99	20,435
55	9,539	9,588	22,70	22,82	22,67	22,076

Tabelle 15 (Fortsetzung).

x	unausgeglichen $10^3 \cdot M\mu_x$	ausgeglichen $10^3 \cdot M\mu_x$	ausgeglichen $10^3 \cdot q_x$	unausgeglichen $10^3 \cdot q_x$	Abel $10^3 \cdot q_x$	ausgeglichen $10^3 \cdot \mu_x$
56	10,283	10,368	24,53	24,27	24,51	23,872
57	11,123	11,221	26,54	26,49	26,51	25,837
58	12,050	12,152	28,71	28,29	28,68	27,981
59	13,112	13,165	31,07	30,98	31,04	30,314
60	14,353	14,262	33,60	33,84	33,63	32,839
61	15,605	15,440	36,31	37,23	36,44	35,551
62	16,889	16,700	39,20	39,53	39,45	38,452
63	18,178	18,046	42,28	42,01	42,59	41,553
64	19,542	19,489	45,57	45,79	45,85	44,875
65	20,975	21,043	49,11	49,10	49,22	48,452
66	22,609	22,724	52,95	52,65	52,79	52,324
67	24,454	24,553	57,08	56,34	56,69	56,535
68	26,395	26,540	61,60	61,72	61,05	61,111
69	28,585	28,712	66,49	66,61	66,01	66,112
70	31,018	31,082	71,79	70,95	71,59	71,569
71	33,663	33,661	77,53	77,90	77,68	77,618
72	36,507	36,478	83,76	84,06	84,06	83,994
73	39,736	39,549	90,49	90,60	90,64	91,065
74	42,886	42,880	97,70	97,81	97,62	98,735
75	46,165	46,483	105,69	105,55	105,10	107,031
76	50,032	50,601	114,34	110,89	113,18	116,513
77	54,312	54,888	123,20	123,46	121,93	126,384
78	59,775	59,337	132,29	134,08	131,38	136,628
79	65,028	63,956	141,76	143,43	141,56	147,264
80	69,830	68,909	152,16	158,19	152,52	158,669
81	74,873	74,581	163,86	157,53	164,35	171,729
82	79,598	80,990	176,89	173,99	176,96	186,486
83	85,940	88,187	190,73	189,98	190,22	203,058
84	94,009	95,689	204,99	195,59	204,18	220,333
85	103,003	103,642	219,80	226,10	218,95	238,644
86	113,538	112,023	235,14	236,12	234,56	257,942
87	120,496	120,893	251,01	250,17	251,02	278,366
88	131,722	130,229	267,34	274,43	268,34	299,863
89	142,323	140,050	284,12	258,75	286,51	322,477
90	150,093	150,358	301,32	325,71	305,48	346,212
91	138,345	161,174	318,92	271,74	325,20	371,116
92	127,113	172,521	336,88	242,42	345,62	397,245
93	128,353	184,381	355,12	177,78	366,69	424,554

Tabelle 15 (Fortsetzung).

x	unausgeglichen $10^3 \cdot M\mu_x$	ausgeglichen $10^3 \cdot M\mu_x$	ausgeglichen $10^3 \cdot q_x$	unausgeglichen $10^3 \cdot q_x$	Abel $10^3 \cdot q_x$	ausgeglichen $10^3 \cdot \mu_x$
94	143,363	196,750	373,67	342,86	388,36	453,034
95	160,035	209,731	392,47	333,33	410,61	482,924
96	129,768	223,221	411,43	285,71	433,43	513,995
97		237,271	430,53	125,00	456,80	546,337
98		251,879	449,76	0,00	480,70	579,973
99		267,109	469,06	428,57	505,10	615,042
100		282,893	488,35	500,00	529,97	651,385
101		299,260				
102		316,247				

Tabelle 16.

	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74
38	38,0																		
40	39,0	40,0																	
42	40,1	41,0	42,0																
44	41,3	42,1	43,0	44,0															
46	42,5	43,3	44,2	45,0	46,0														
48	44,0	44,6	45,4	46,2	47,0	48,0													
50	45,4	46,0	46,6	47,4	48,2	49,0	50,0												
52	46,9	47,4	48,0	48,6	49,4	50,2	51,0	52,0											
54	48,4	48,9	49,4	50,0	50,6	51,3	52,2	53,0	54,0										
56	50,0	50,4	50,9	51,4	52,0	52,6	53,4	54,2	55,0	56,0									
58	51,7	52,0	52,4	52,9	53,4	54,0	54,6	55,4	56,2	57,0	58,0								
60	53,4	53,7	54,1	54,5	54,9	55,4	56,0	56,6	57,4	58,2	59,0	60,0							
62	55,1	55,4	55,7	56,1	56,5	56,9	57,4	58,0	58,6	59,4	60,2	61,0	62,0						
64	56,9	57,1	57,4	57,7	58,0	58,4	58,9	59,4	59,9	60,6	61,3	62,1	63,0	64,0					
66	58,6	58,8	59,0	59,3	59,6	60,0	60,4	60,8	61,3	61,9	62,6	63,3	64,1	65,0	66,0				
68	60,3	60,5	60,7	60,9	61,2	61,5	61,9	62,3	62,8	63,3	63,9	64,6	65,3	66,2	67,0	68,0			
70	62,2	62,3	62,5	62,7	62,9	63,2	63,5	63,9	64,3	64,8	65,3	66,0	66,6	67,4	68,2	69,0	70,0		
72	64,1	64,2	64,4	64,6	64,8	65,0	65,3	65,6	66,0	66,4	66,9	67,4	68,0	68,6	69,4	70,2	71,0	72,0	
74	66,1	66,2	66,3	66,4	66,6	66,8	67,1	67,4	67,7	68,1	68,4	68,9	69,5	70,0	70,6	71,4	72,2	73,0	74,0

Lebenslauf.

Ich wurde am 5. August 1914 in Weißenfels geboren. Dort besuchte ich das Reformrealgymnasium, an dem ich im März 1932 die Reifeprüfung bestand. An den Universitäten Leipzig (1932 bis 1934), Hamburg (1934), Jena (1935) und Frankfurt a. M. (1937/38) studierte ich acht Semester lang Mathematik, Physik und Versicherungswesen. Vom Oktober 1935 bis zum Oktober 1937 genügte ich meiner aktiven Dienstpflicht beim I.R. 11 in Leipzig. Am 30. 11. 1938 bestand ich in Frankfurt a. M. die Abschlußprüfung des Seminars für Versicherungswissenschaft. Ich besitze die deutsche Staatsangehörigkeit.